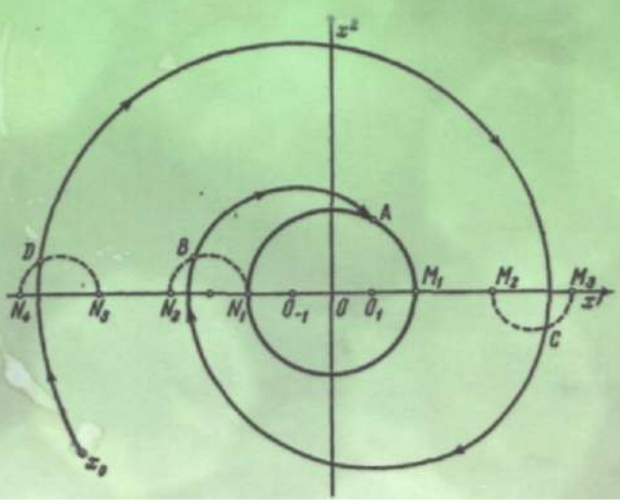
N.Mamadaliev, M Tuxtasinov

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt} &= x^2,\\ \frac{dx^2}{dt} &= -x^1 + u\end{aligned}\right\}$$

# VARIATSION HISOB VA OPTIMAL BOSHQARUVNING ASOSIY MASALALARI



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

N.Mamadaliev, M.Tuxtasinov

# VARIATSION HISOB VA OPTIMAL BOSHQARUVNING ASOSIY MASALALARI

Toshkent
"Universitet"
2013

Mazkur o'quv qo'llanma matematika, mexanika, tadbiqiy matematika va informatika yo'nalishlarida ta'lim cayotgan 4-bosqich talabalari uchun mo'ljallangan. Ushbu qo'llanma «Variation hisob va optimallashtirish usullari» hamda «Jarayonlar tadqiqoti va optimalboshqaruv» nomli umumiy kurslarning negizida yozilgan bo'lib, namunavi) fan dasturida ko'rsatilgan barcha mavzularni o'z ichiga oladi. Asosiy e'ibor «Variatsion hisob va Optimal boshqaruuv» ning asosiy masalalariga qaratilgan. Mavzularning nazariy qismi yetarli darajada masala va misollarni yechish orqali yoritilgan hamda mavzu so'ngida mustaqil shug'ullanish uchun masala ва misollar keltirilgan.

**Ma'sul muharrir: f.-m.f.d. SH.G.Qosimov**

**Taqrizchilar: prof. M.M.Aripov, katta il.xodim. O.Qo'chqorov**

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti O'quv-uslubiy kengashining 2011 yil 26 apreldagi majlisining 9 sonli qarori bilan nashrga tavsiya etilgan.

ISBN – 978 – 9943 – 305 – 63 - 2

## KIRISH

Fan va texnikaning jadal suratlar bilan rivojlanishi, ayniqsa boshqariladigan jarayonlarning insoniyat hayotiga kirib kelishi bilan yangi turdagi variatsion masalalar vujudga keldi. Xususan, zamonaviy muhandisning kundalik hayotda matematikaning xilma-xil usullarini tatbiq qilishda doimo undan yaxshi matematik tayyorgarlik va qat'iy ko'nikmaga ega bo'lishni talab qiluvchi masalalar bilan ishlashiga tog'ri keladi.

Variatsion hisobning vujudga kelishi XVII asrning oxirlariga to'g'ri keladi. Variatsion hisobning asosiy masalasi I.Bernulli tomonidan 1696 yilda qo'yilgan brahistohrona haqidagi masalaning bevosita umumiy holi sifatida yuzaga keldi. Bu masala matematik masalalar yangi sinfining o'ziga xos hususiyatlarini muzassamlashtirgan bo'lib, variatsion hisobning butun tarihi davomida yangi usullarni sinab ko'rish ob'yekti hamda juda ko'p qiziqarli va muhim umumlashtirishlarning asosi bo'lib xizmat qildi. O'sha paytdan boshlab matematikaning cheksiz o'lchovli funksional fazolarda ekstremal masalalarni o'rganuvchi bo'limi variatsion hisob deb atala boshlandi. Yangi bo'limning nomi uning asosiy usuli –variatsiyalarni hisoblash (tahlil qilish) dan kelib chiqqan. XX asrning ikkinchi yarmidan boshlab, hozirgi zamon fani va texnikasining masalalari bilan bog'liq holda variatsion hisobning yangi tarmog'i-optimal boshqaruv nazariyasi yuzaga keldi va jadal rivojlana boshladi. Bu haqda mazkur qo'llanmaning III bobida so'z yuritamiz.Variatsion hisob klassik matematik analizning tatbiq uchun muhim bo'lgan bo'limi hisoblanadi. Ushbu qo'llanmada variatsion hisob va optimal boshqaruvning asosiy masalalarini sodda va ravon tilda yoritishga harakat qilingan. Optimallashtrish masalalari inson faoliyatining turli sohalarida uchraydi. Differensial va integral hisobning yuzaga kelishi optimallashtirish usullarining rivojlanishiga kuchli ta'sir ko'rsatib, bu hol XVIII asrda variatsion hisobning paydo bo'lishiga olib keldi. Qisqa vaqt ichida nazariyaning shunday yangi bo'limlari (chiziqli programmashtirish, optimal boshqaruv nazariyasi va boshqalar) yaratildiki, ular amalda uchraydigan ko'plab ekstremal masalalarni yechishning qator samarali hisoblash usullarining yaratilishiga olib keldi.

Ushbu qo'llanmaning bosh maqsadi- variatsion hisob va optimal boshqaruv nazariyasining asosiy masalalari va tushunchalarini sodda va tushunarli holda o'quvchiga yetkazishdan iborat.

Zaruriy va yetarli shartlar teorema ko'rinishida ifoda qilingan. II-bob funksionalning variatsiyasi, variatsion hisobning asosiy masalasi va uning umumlashmalarini bayon yetgan. III-bob esa, optimal boshqaruv nazariyasining asosiy masalasini chiziqli tizimlar uchun qo'yilishi, optimallikning zaruriy va yetarli shartlari, Pontryaginning maksimum prinsipidan iborat.

Ushbu qo'llanmada mavzularni boyitish hamda kengroq yoritish maqsadida yetarli darajada misol va masalalar keltirilgan.

## DASTLABKI MULOHAZALAR

1. Agar A-ixtiyoriy elementlar to'plami bo'lsa, u holda "*a element A to'plamga tegishli*" degan tasdiq ramziy ko'rinishda $a \in A$ kabi yoziladi.

$a \notin A$ (yoki $a \notin A$) yozuv a elementning A to'plamga tegishli emasligini anglatadi.

Agar A va B to'plamlar bo'lsa, u holda *"A B to'plamning qism to'plami"* (ramziy ko'rinishda $A \subset B$) degan tasdiq A to'plamning har qanday x elementi B to'plamga ham tegishli ekanligini anglatadi.

2. Ikkita A va B to'plamlarning birlashmasi va kesishmasi quyidagi tarzda aniqlanadi:

$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \text{ yoki } x \in B\}$ *birlashma* A va B to'plamlardan aqalli bittasiga tegishli bo'lgan x elementlarning majmuidir.

$A \bigcap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$ *kesishma*- bir vaqtning o'zida ham A ga, ham B ga tegishli bo'lgan elementlar majmuidir.

3. Agar A-haqiqiy sonlar to'plami bo'lsa, u holda A ning *yuqori chegarasi (aniq yuqori chegarasi)* deb, barcha $a \in A$ lar uchun $a \le M$ munosabatni qanoatlantiruvchi eng kichik M haqiqiy songa aytiladi. Boshqa so'z bilan aytganda, agar ixityoriy $a \in A$ lar uchun $a \le M$ munosabatga ega bo'lsakda, ammo $\varepsilon > 0$ ning qanday bo'lishidan qat'iy nazar (yetarlicha kichik bo'lsa ham) $M - \varepsilon < b$ munosabatni qanoatlantiruvchi aqalli bitta $b \in A$ element topilsa, u holda M soni A ning yuqori chegarasi bo'ladi.

Agar bunday son mavjud bo'lmasa, u holda A ning yuqori chegarasi sifatida $+\infty$ olinadi.

Ikkala holda ham, A to'plamning yuqori chegarasi $SupA$ kabi belgilanadi. *A to'plamning quyi chegarasiga* ham shunga o'xshash ta'rif beriladi va u $\inf A$ ko'rinishda belgilanadi.

4. *Chiziqli fazo* deb, qo'shish hamda songa ko'paytirish amallari aniqlangan, jumladan:

1) $x+y=y+x$;

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

3) shunday 0 element (nol element) mavjudki, ixtiyoriy $x\in R$ uchun x+0=x munosabat o'rinli bo'ladi;

4) har bir $x\in R$ uchun shunday –x (qarama-qarshi) element mavjudki, x+(-x)=0 munosabat o'rinli bo'ladi;

5) $1\cdot x=x$;

6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

aksiomalarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy tabiatli x,y,z... elementlardan tashkil topgan R to'plamga aytiladi.

5) *R chiziqli fazo normallangan fazo* deyiladi, agar har bir $x\in R$ elementga $\|x\|$ manfiy bo'lmagan haqiqiy son-mazkur elementning normasi mos qo'yilgan bo'lsa, jumladan:

1) $\|x\|=0$ bo'ladi, faqat va faqat $x=0$ da;

2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$;

3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (normaning uchburchak aksiomasi) munosabatlar o'rinli bo'lsa.

6) Ixtiyoriy tabiatli x,y,z,... elementlarning M to'plami *metrik fazo* deb ataladi, agar M to'plamning har bir x,y elementlar juftligiga quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\rho(x,y)$ manfiy bo'lmagan haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa :

1) $\rho(x,y)=0$ bo'ladi, faqat va faqat x=y bo'lganda (ayniyat aksiomasi) ;

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (simmetriya aksiomasi) ;

3) $\rho(x,y)+\rho(y,z)\ge\rho(x,z)$ (uchburchak aksiomasi)

$\rho(x,y)$ son x va y *elementlar orasidagi masofa* deyiladi.

Har qanday chiziqli normallangan fazo metrik fazo bo'la oladi : buning uchun $\rho(x,y)=\|x-y\|$, deb olish yetarlidir.

7. $C[a,b]$ *fazo* - [a,b] da barcha uzluksiz bo'lgan y(x) funksiyalar fazosidir:

$$\|y\|_{c} = \max_{a \le x \le b} |y(x)|$$

$C_1[a,b]$ *fazo* - [a,b] da birinchi tartibli hosilasi bilan uzluksiz bo'lgan barcha y(x) funksiyalar fazosidir:

$$\|y\|_{c_1} = \max_{a \le x \le b} |y(x)| + \max_{a \le x \le b} |y'(x)|.$$

$C_n[a,b]$ *fazo* - [a,b] da n-tartibli (n-qayd etilgan natural son) hosilaga ega bo'lgan uzluksiz y(x) funksiyalar fazosidir:

$$\|y\|_{c_n} = \sum_{k=0}^{n} \max_{a \le x \le b} |y^{(k)}(x)|.$$

Ayrim hollarda $C_n[a,b]$ da y(x) *elementning normasi*

$$\|y\| = \max_{a \le x \le b} \{|y(x)|, |y'(x)|, \ldots, |y^{(n)}(x)|\}$$

ko'rinishda aniqlanadi.

# I BOB

# KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING EKSTREMUMI

## 1 §. Shartsiz ekstrenum

n o'lchovli evklid $E^n$ fazosining qandaydir D sohasida $f(x_1,x_2,...,x_n)$ yoki qisqacha $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. $f(x)$ funksiya $x_0 \in D$ nuqtada o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishadi deyiladi, agar $x \in D$ nuqta qanday bo'lmasin, $f(x) \le f(x_0)$, ($f(x) \ge f(x_0)$) bo'lsa.

**Veyershtrass teoremasi.** Epiq chegaralangan sohada har qanday uzluksiz funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi.

**Ta'rif 1.** $f(x)$ funksiya $D \subset E^n$ sohada aniqlangan bo'lsin. $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqta $f(x)$ funksiyaning qat'iy maxsimum (mos ravishda qat'iy minimum) nuqtasi deyiladi, agar $x^{(0)}$ nuqtaning shunday $U(x^{(0)})$ atrofi mavjud bo'lib, barcha $x \in U(x^{(0)}) \cap D, x \neq x^{(0)}$ nuqtalar uchun $f(x) < f(x^{(0)})$ (mos ravishda $f(x) > f(x^{(0)})$) tengsizlik bajarilsa.

Qat'iy maxsimum (mos ravishda qat'iy minimum) nuqtalar barcha $x \in U(x^{(0)}) \cap D, x \neq x^{(0)}$ nuqtalarda

$$\Delta f = f(x) - < f(x^{(0)}) < 0, \text{ (mos ravishda } \Delta f = f(x) - < f(x^{(0)}) > 0)$$

bo'lish bilan tavsiflanadi.

Agarda, $x^{(0)}$ nuqtaning $U(x^0)$ atrofi mavjud bo'lib, barcha $x \in U(x^{(0)}) \cap D, x \neq x^{(0)}$ nuqtalar uchun $f(x) \le f(x^{(0)})$ (mos ravishda $f(x) \ge f(x^{(0)})$) tengsizlik bajarilsa, u holda $x^{(0)}$ nuqta $f(x)$ funksiyaning oddiy maxsimum (mos ravishda oddiy minimum) nuqtasi deyiladi.

**Ta'rif 2.** Maxsimum va minimum nuqtalar $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtalari deyiladi.

**1.** Ta'rifdan foydalanib, quyidagi funksiyalarning ekstremum nuqtalari topilsin:

**a).** $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;

**b).** $f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2, & agar \quad x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ +1, & agar \quad x_1^2 + x_2^2 = 0. \end{cases}$

**c).** $D\{x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$ sohada $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$;

**Teorema 1.** (Ekstremumning zaruriy sharti). Aytaylik $f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqtaning qandaydir $U(x^{(0)})$ atrofida aniqlangan bo'lsin. Agar bu nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa va agar $f(x)$ funksiyaning bu nuqtadagi $\frac{\partial f}{\partial x_j}, (j=1,2,...,n)$, hosilasi mavjud bo'lsa, u holda $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_j}=0, \quad (j=1,2,...,n)$, bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya $x^{(0)}$ ekstremum nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning differensiali o'sha nuqtada nolga teng bo'ladi, ya'ni $df(x^{(0)})=0$.

**Misol 1.** $z=x^2+y^2$ funksiyaning ekstremum nuqtasi topilsin.

**Yechish.** Ushbu funksiyaning ekstremum nuqtalarini $dz=0$ ga aylantiruvchi nuqtalar ichidan izlaymiz. Bizning holda $dz=2xdx+2ydy$ bo'ladi. $dz=0$ shart yagona $x=0, y=0$ nuqtalarda bajariladi. Haqiqatdan ham, agar $x=y=0$ bo'lsa, $dz=0$ bo'ladi. Aksinchasi, $dz=0$ bo'lsin, $dx, dy$ larni ixtiyoriyligidan foydalanib, $dy=0$ ni deb tanlaymiz, u holda $0=dz=2xdx$ bo'ladi va $dx$ ni ixtiyoriyligidan $x=0$ kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, $y=0$ ni ham olamiz. $(0,0)$ nuqtada $z=0$ ga ega bo'lamiz, qolgan nuqtalarda esa $z=x^2+y^2>0$ bo'ladi. Shuning uchun, $(0,0)$ nuqta $z=x^2+y^2$ funksiyaning qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi.

Agar differensiallanmaydigan nuqtalarni qo'shib, ekstremum qidirilayotgan nuqtalar sinfini kengaytirsak, u holda quyidagi ekstremumning zaruriy shartiga kelamiz:

*Agar $x^{(0)}$ nuqta $f(x_1,x_2,...x_n)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa, u holda uning $x^{(0)}$ nuqtadagi har bir xususiy hosilasi $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_j}, \ (j=1,2,...,n)$, no'lga teng bo'ladi yoki mavjud bo'lmaydi.*

**Misol 2.** $z=\sqrt{x^2+y^2}, \ z\ge 0$, konusning yuqori pallasini qaraymiz. Ravshanki, 0(0,0) nuqtada $z$ minimumga erishadi. Lekin, 0(0,0) nuqtada $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ hosilalar mavjud emas.

**Ta'rif 3.** $f(x)$ funksiya ekstremumining zaruriy sharti bajarilgan nuqtalar $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalari, deb ataladi.

$df(x^{(0)})=0$ ga aylantiradigan $x^{(0)}$ nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi deyiladi. $df(x^{(0)})=0$ shart $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_j}=0, \quad (j=1,2,...,n)$, shartga ekvivalent.

**Teorema 2** (Qat'iy ekstremumning yetarli sharti). Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x^{(0)}=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqtaning biron atrofida ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega va $x^{(0)}$ nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lsin. Agar kvadratik forma

$$A(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j , \qquad (1)$$

ya'ni kvadratik formada $f(x)$ funksiyaning $x^{(0)}$ nuqtadagi ikkinchi tartibli differensiali musbat aniqlangan (manfiy aniqlangan) bo'lsa, u holda $x^{(0)}$ nuqta qat'iy minimum (mos ravishda nuqta qat'iy maxsimum) bo'ladi. Agar (1) kvadratik forma aniqlanmagan bo'lsa, u holda $x^{(0)}$ nuqtada ekstremum bo'lmaydi.

$1^0$ . ***Kvadratik forma musbat aniqlanganligining Silvestr kriteriyasi.*** Ushbu

$$A(x) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (2)$$

kvadratik formaning $a_{ij} = a_{ji},\ j,i = 1,2,\ldots,n,$ musbat aniqlangan bo'lishligi uchun

$$a_{11}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

(2) kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lishligi uchun

$$a_{11}<0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} (-1)^n > 0$$

o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

$n = 2$ bo'lgan holni qaraylik. $f(x,y)$ funksiya $(x_0, y_0)$ nuqtaning biron atrofida aniqlangan va ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilaga ega hamda $(x_0, y_0)$ statsionar nuqta bo'lsin, yani

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 .$$

Unda, agar $(x_0, y_0)$ da

$$f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$$

bo'lsa, u holda $(x_0, y_0)$ nuqta $f(x,y)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'ladi. Shuningdek, agar $f''_{xx} < 0, (f''_{yy} < 0)$ bo'lsa, maksimum va agar $f''_{xx} > 0, (f''_{yy} > 0)$ bo'lsa minimum bo'ladi. Agar $(x_0, y_0)$ nuqtada $f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0$ bo'lsa, u holda $(x_0, y_0)$ nuqtada extremum yo'q. Va nihoyat, qachonki $(x_0, y_0)$ nuqtada $f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0$ bo'lsa, u holda $(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremum bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Bu oxirgi hol alohida tekshiruvni talab etadi.

**Misol 3.** $z=x^4+y^4$, $z=-x^4-y^4$, $z=x^4-y^4$ funksiyalarni qaraymiz. $(0,0)$ nuqta har bir funksiya uchun statsionar nuqta bo'ladi va bu nuqtada har bir funksiya uchun $z''_{xx}z''_{yy}-(z''_{xy})^2=0$ bo'ladi. $(0,0)$ nuqtani 1-funksiya uchun minimum, ikkinchi funksiya uchun maxsimum va uchinchi funksiya uchun ekstremum nuqta bo'lmasligini ko'rish qiyin emas. Har uchchala holda ham z(0,0)=0 bo'ladi, lekin birinchi holda $(0,0)$ nuqtaning funksiya atrofida ($(0,0)$ nuqtaning o'zidan tashqari) funksiyaning qiymati musbat, ikkinchisida manfiy va uchinchi holda $z=x^4-y^4$ funksiya koordinata boshining ixtiyoriy yaqinida musbat (masalan, $x\neq 0, y=0$ da), manfiy (masalan, $x=0, y\neq 0$ da) qiymatlarni qabul qiladi.

**Misol 4.** $f=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$ uch o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumni topilsin.

**Yechish.** $f$ funksiyaning statsionar nuqtasini topamiz. Buning uchun quyidagi sistemani tuzib olamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-y+1=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y-x=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=2z-2=0, \end{cases}$$

bu tenglamalar tizimini (sistemasini) yechib, $x_0=-\dfrac{2}{3}, y_0=-\dfrac{1}{3}, z_0=1$ larga ega bo'lamiz. Endi $P_0(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},1)$ nuqtada kvadratik formani tuzib olamiz. Bundan

$$f''_{xx}=2,\ f''_{xy}=-1,\ f''_{xz}=0,\ f''_{yx}=-1,\ f''_{yy}=2,\ f''_{yz}=0,\ f''_{zx}=0,\ f''_{zy}=0,\ f''_{zz}=2$$

larga ega bo'lamiz. $P_0$ nuqtada $a_{11}=2,\ a_{12}=-1,\ a_{13}=0$,

$$a_{21}=-1,\ a_{22}=2,\ a_{23}=0,\ \Rightarrow\ a_{11}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3>0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6>0,$$

$a_{31}=0,\ a_{32}=0,\ a_{33}=2$ larni olamiz. Silvestr kriteriyasidan foydalanib hulosa qilsak, bu kvadratik forma musbat aniqlangan, demak, 2-teoremaga asosan $P_0$ nuqtada $f(P_0)=-\dfrac{4}{3}$ bo'lgani uchun $P_0$ nuqtada $f$ funksiyaning qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi.

**Misol 5.** $z=x^3y^2(6-x-y)$ funksiyaning ekstremumi topilsin.

**Yechish.** Statsionar nuqtalarni topamiz:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 18x^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3=0 \\ z'_y &= 12x^3y-2x^4y-3x^3y^2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ x_1=0, y_1=0, x_2=3, y_2=2,$$

Ikkita $P_1(0,0)$ va $P_2(3,2)$ statsionar nuqtalar hosil bo'ldi. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalarini topsak,

$$z''_{xx} = 36xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3,$$
$$z''_{yy} = 12x^3 - 2x^4 - 6x^3y,$$
$$z''_{xy} = 36x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2,$$

bo'ladi. $P_1$ nuqtada $z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = 0$; $z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$, bo'lib, bu nuqtadagi ekstremum masalasi ochiq qoladi. Buni hal etish uchun yuqori tartibli hosilaga murojaat etish zarur. $P_2$ nuqtada $z''_{xx} = -144$, $z''_{yy} = -162$, $z''_{xy} = -108$. Ravshanki, $z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$, $z''_{xx} < 0$ ekanligidan $P_2(3,2)$ da maksimumga erishadi va $z_{max} = 108$.

Quyidagi funksiyalarning maksimum va minimumi tekshirilsin:

2. $f = (x-1)^2 - 2y^2$.
3. $f = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.
4. $f = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
5. $f = \dfrac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.
6. $f = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}, (x > 0, y > 0, z > 0)$.
7. $f = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.
8. $f = \sin x \sin y \sin(x + y), (0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi)$.
9. $f = x_1x_2^2 \ldots x_n^n(1 - x_1 - 2x_2 - \ldots - nx_n), (x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots x_n > 0)$.
10. $z = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ funksiyaning cheksiz maxsimumlar to'plamiga bironta ham minimumga ega emasligi ko'rsatilsin.
11. $f(x, y)$ funksiyaning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada minimumi bo'lishi uchun bu funksiyaning
 $M_0$ nuqtadan o'tuvchi har bir to'g'ri chiziq bo'ylab minimumga ega bo'lishi yetarli bo'ladimi? $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ misolga qaralsin.
12. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning bir o'zgaruvchili funksiyadan farqi $D$ sohada
 yagona ekstremumi-maksimumi va minimumining mavjudligi, bu ekstremum
 funksiyaga albatta butun sohada eng katta va eng kichik qiymatlar berishini anglatmasligi ko'rsatilsin. Quyidagi misollar ko'rilsin:
 a) $z = x^2 - y^2 + 2e^{-x^2}, -\infty < x, y < +\infty$,
 b) $z = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2, D\{-5 \le x \le 5; -1 \le y \le 1\}$.
13. Davri $2\pi$ ga teng bo'lgan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. n-tartibli trigonometric

$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ ko'phadlar ichidan $a_k, b_k$ koeffisentlarni tanlash yo'li bilan shunday ko'phadni topish talab etiladiki,

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]^2dx$$

tenglik bilan aniqlangan o'rtacha kvadratik chetlashishi eng kichik qiymatga ega

bo'lsin.

**2°. *Tez tushish (gradiyentlar) usuli.*** $f(x), x=(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning minimumini topish masalasi qo'yilgan bo'lsin. Biron bir $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqtani olib $f(x)$ funksiyaning shu nuqtadagi gradiyentini hisoblaymiz

$$gradf(x^0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^0)e_i}{\partial x_i},$$

bu yerda $e_1,e_2,...,e_n$ lar $R^n$ fazosining ortonormal bazislari. Agar $gradf(x^0)$ bo'lsa, u holda $x_k^1=x_k^0-h_1,(gradf(x^0),e_k),(k=1,2,...,m)$, deb olamiz, bu erda $h>0$ yetarlicha kichik son. Agar $gradf(x^1)\neq 0$ bo'lsa, u holda $x_k^2=x_k^1-h_2,(gradf(x^1),e_k),h_2>0$, deb olamiz, va nihoyat, agar $gradf(x^{n-1})\neq 0$ bo'lsa, u holda $x_k^n=x_k^{n-1}-h_n(gradf(x^{n-1}),e_k)$ $(k=1,2,...,m),(h_n>0)$ deb olamiz. Aniq qonuniyat asosida $\{f(x^n)\}$ monoton kamayuchi ketma-ketlikni hosil qilamiz. Agar $x^n\to\bar{x}$ va $\bar{x}-f(x)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'lsa, u holda $n\to\infty\Rightarrow gradf(x^n)\to 0$ bo'ladi.

**Misol 6.** $f(x)=x^2$ funksiyaning minimum nuqtasi topilsin.

**Yechish.** $x^0=1$ nuqtani olamiz va $gradf(x^0)=2x^0i=2i\neq 0$ ga ega bo'lamiz. Shuning uchun $x^1=x^0-2h$, bu yerda $h>0$. So'ngra, $gradf(x^1)=2(1-2h)i$ bo'ladi. Agar $h\neq\frac{1}{2}$ bo'lsa, unda $gradf(x^1)\neq 0$ va $x^2=x^1-2h(1-2h)=(1-2h)^2$ bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib, quyidagiga $x^n=(1-2h)^n$ ega bo'lamiz. Ma'lumki, agar $0<h<1$ bo'lsa, u holda $n\to\infty$ da $x^n\to 0$. U holda $x=0$ nuqta $f(x)=x^2$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'ladi. Agarda $h=\frac{1}{2}$ bo'lsa, u holda $x^1=0, gradf(x^1)=0$ bo'lib, limiti nolga teng bo'lgan $\{0\}$ statsionar ketma-ketlikni hosil qilamiz.

**Misol 7.** $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiyaning minimum nuqtasi topilsin.

**Yechish.** Masalan (1,1) nuqtani olaylik, ya'ni $x^0=1, y^0=1$. Bundan $gradf(1,1)=2i+2j$. Bu yerda $gradf(1,1)\neq 0$ bo'lganligi uchun,
$x^1=x^0-2x^0h=1-2h$, $y^1=y^0-2y^0h=1-2h$, $(h>0)$ ega bo'lamiz.
Quyidagiga egamiz

$$gradf(x^1,y^1)=2(1-2h)i+2(1-2h)j\neq 0;\quad (h\neq\frac{1}{2})$$

shuning uchun

$$\begin{cases} x^2 = x^1 - 2x^1h = (1-2h)^2, \\ y^2 = y^1 - 2y^1h = (1-2h)^2, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} h > 0 \\ h \neq \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

deb olamiz. Bu jarayonni davom ettirib, quyidagiga

$$x^n = (1-2h)^n, y^n = (1-2h)^n$$

ega bo'lamiz. $0 < h < 1$ bo'lganligi uchun, berilgan funksiyaning minimum $M(0,0)$ nuqtasiga yaqinlashuvchi $M_n(x^n, y^n)$ ketma-ketlikga ega bo'lamiz. Ravshanki, $n \to \infty$ da $gradf(x^n, y^n) = 2(1-2h)^n i + 2(1-2h)^n j \to 0$. Demak, (0,0) nuqta $f(x,y) = x^2 + y^2$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'ladi.

Gradiyentli tushish usuli yordamida $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$ funksiyaning minimum nuqtasi topilsin.

## 2 §. Shartli ekstremum

$E^n$ fazoning qandaydir D sohasida aniqlangan n o`zgaruvchili $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya berilgan bo`lsin. $x_1, x_2, ... x_n$ larga yana m ta bog`lovchi tenglamalar, deb nomlanuvchi

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{array} \right\} \qquad (1)$$

qo`shimcha shart qo'yilgan bo`lsin (m<n).

Aytaylik, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ – D sohaning ichki nuqtasi bo`lsin. $f(x_1, x_2, ... x_n)$ funksiya $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqtada shartli maximumga (mos ravishda shartli minimumga ) ega deyiladi, agar $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqtaning biron atrofida $(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqtalar (1) bog`lanish tenglamasini qanoatlantirgan holda

$$f(x_1, x_2, ... x_n) \leq f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \qquad (2)$$

(mos ravishda $f(x_1, x_2, ... x_n) \geq f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$) tengsizlik bajarilsa.

**Misol 1.** $z = x^2 + y^2$ funksiya (0,0) nuqtada 0 ga teng bo`lgan shartsiz minimumga ega. Bog`lanish tenglamasini qo`shamiz $x + y - 1 = 0$, ya'ni $z = x^2 + y^2$ sirtning faqat $x + y - 1 = 0$ shartni qanoatlantiruvchi $(x, y)$ qiymatlardagi minimumini qidiramiz. (0,0) nuqtada shartli minimumga ega bo`lolmaydi, chunki bu bog`lanish tenglamasini qanoatlantirmaydi. Bog`lanish tenglamasini $y$ ga nisbatan yechib, sirtning tenglamasiga qo`yamiz va $z = x^2 + (1-x)^2$ bir o`zgaruvchili funksiyaga ega bo`lamiz. Uni ekstremumga tekshirib, $x_{sharg} = \frac{1}{2}$, $z_{min} = \frac{1}{2}$ larni topamiz. Bog`lanish tenglamasiga asosan

$y_{chog}=\frac{1}{2}$ ni topamiz. Bu $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ nuqta $z=x^2+y^2$ paroboloidning $x+y-1=0$ tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan parabolaning uchi bo'ladi. Shunga o`xshash umumiy xolda ham shunday qilish mumkin.

Aytaylik $z=f(x,y)$ funksiyaning bog`lanish $\varphi(x,y)=0$ sharti ostida ekstremumi izlanayotgan bo`lsin. Aytaylik $\varphi(x,y)=0$ tenglama ko`rilayotgan $x$ va $y$ qiymatlarda $y$ ni $y=\Psi(x)$ ni bir qiymatli diffirinsiallanuvchi funksiya sifatida aniqlasin. $f(x,y)$ da y ning o`rniga $\Psi(x)$ funksiyani qo`yib, $z=f(x,\Psi(x))=F(x)$ bitta $x$ o`zgaruvchili funksiyani hosil qilamiz. $F(x)$ funksiyaning shartsiz ekstremumi $f(x,y)=0$ bog`lanish tenglamasiga ko`ra $f(x,y)$ funksiyaning izlanayotgan shartli ekstremumi hisoblanadi. Bu usul amalda har doim ham qulay hisoblanmaydi, chunki u $\varphi(x,y)=0$ tenglamaning aniq biror o`zgaruvchiga nisbatan yechimini talab qiladi.

$z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning (1) bog'lanishga ko`ra ekstremal qiymatlarini toppish uchun Langranjning aniqmas ko`payturvchilar usuli qo'llaniladi.

***Lagranj ko`paytuvchilar usuli.*** Faraz qilaylik :

1) $f(x_1,x_2,...,x_n)$ va $\varphi_i(x_1,x_2,...,x_n)$, $(i=1,2,...,m)$ funksiyalar $D$ sohada birinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega;

2) $m<n$ va $\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$, matritsaning rangi $D$ sohaning har bir nuqtasida m ga teng.

Yangi funksiya (Lagranj funksiyasi) tuzamiz

$$\Phi=f+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i. \tag{3}$$

bu yerda $\lambda_i$ - noma'lum o'zgarmas ko`paytuvchilar (Lagranj ko`paytuvchilari). Endi

$\Phi(x_1,...,x_n)$ funksiya shartsiz ekstremumga tekshiriladi, ya'ni

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial\phi}{\partial x_2}=0,\ldots,\ \frac{\partial\phi}{\partial x_n}=0 \tag{4}$$

tenglamalar sistemasi tuziladi, so'ngra (4) dan va m ta $\varphi_1=0,\ \varphi_2=0,\ldots,\ \varphi_m=0$ bog`lanish tenglamasidan $\lambda_1,...,\lambda_m$ parametrlarning qiymatlari hamda $(x_1,x_2,...,x_n)$ ekstremum bo`lishi mumkin bo`lgan nuqtalarning koordinatalari aniqlanadi.

(4) shart Lagranj funksiyasining va dastlabki $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya ekstremumining zaruriy sharti hisoblanadi.

Agar $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqta $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya uchun shartli ekstremum nuqtasi bo`lsa, u holda u Longranj funksiyasi uchun statsionar nuqta hisoblanadi, ya'ni bu nuqtada $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=0$, $(i=1,2,...,n)$ bo'ladi. $\Phi(x_1,...,x_n)$ Lagranj funksiyasini shartli ekstremumga $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ statsionar nuqtada tekshirish uchun quyidagi ko'rinishdagi kvadratik formani tuzish kerak bo'ladi

$$B(dx_1, ..., dx_{n-m}) = \sum_{i,j=1}^{n-m} b_{ij} dx_i dx_j, \tag{5}$$

ya'ni Lagranj funksiyasining shu nuqtadagi

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} dx_n = 0, \qquad (i = 1, 2, ..., m),$$

shartlarni hisobga olgan holdagi ikkinchi tartibli differensiali.

Agar (5) kvadratik forma aniqlangan bo'lsa $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqtada qat'iy shartli ekstremum bo'ladi, aynan: qat'iy shartli maximum bo'ladi, agar (5) kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lsa, qat'iy shartli minimum bo'ladi, agar (5) musbat aniqlangan bo'lsa.

Agar (5) kvadratik forma aniqlanmagan bo'lsa , u holda $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqta shartli ekstremum nuqtasi bo'lmaydi. (3) Lagranj funksiyasi uchun shartsiz ekstremum mavjud emasligini $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya uchun ham shartli ekstremum mavjud emasligini bildirmaydi.

**Misol 2.** $y - x = 0$ shart ostida $z = xy$ funksiyaning ekstremumi topilsin.

**Yechish.** Lagranj funksiyasini tuzamiz $\Phi(x, y) = xy + \lambda(y - x)$. $\lambda$ va ekstremum mumkin bo'lgan nuqtalarning koordinatasini aniqlash uchun mos tenglamalar tizimini yozamiz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = y - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = x + \lambda = 0, \\ y - x = 0. \end{cases}$$

Birinchi tenglamadan $\lambda = y$ ni topamiz. Ikkinchisiga qo'yib, $x + y = 0$ ni topamiz. Shunday qilib,

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0, \\ y - x = 0, \end{array} \right\}$$

ni hosil qilamiz. Bundan $x = y = 0$ va $\lambda = 0$ larni olamiz. Shunday qilib, Lagranj funksiyasi quyidagi $\Phi(x, y) = xy$ ko'rinishda ega bo'ladi. (0,0) nuqtada $\Phi(x, y)$ funksiya shartsiz ekstremumga ega emas, lekin $x = y$ shartda $z = xy$ funksiya shartli ekstremumga ega. Haqiqatdan, bu holda $z = x^2$ ega bo'lamiz, bundan ko'rinadiki (0,0) nuqtada shartli minimum bor.

**Misol 3.**

$$f(x, y, z) = xyz$$

funksiyaning

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x, y, z) = x + y - z - 3 = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = x - y - z - 8 = 0, \end{array} \right\} \tag{6}$$

shartlar ostida shartli ekstremumi topilsin.

**Yechish.** Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$\Phi(x,y,z) = xyz + \lambda_1(x+y-z-3) + \lambda_2(x-y-z-8)$$

va $\lambda_1, \lambda_2$ parametrlarni aniqlash uchun hamda ekstremum mumkin bo`lgan nuqtalarning koordinatasini aniqlash uchun mos tenglamalar tizimini yozamiz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ x + y - z - 3 = 0, \\ x - y - z - 8 = 0. \end{cases}$$

Buni yechib, quyidagilarni topamiz:

$$\lambda_1 = \frac{11}{32},\quad \lambda_2 = -\frac{231}{22},\quad x = \frac{11}{4},\quad y = -\frac{5}{2},\quad z = -\frac{11}{4}.$$

$\Phi(x,y,z)$ funksiyaning 2- differensiali quyidagiga teng bo'ladi

$$d^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}dydz,$$

Bizning holda

$$d^2\Phi = 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz. \qquad (7)$$

(6) bog`lanish shartlaridan foydalanib,

$$\left.\begin{array}{l} dx + dy - dz = 0, \\ dx - dy - dz = 0, \end{array}\right\}$$

ni olamiz. Bundan $dx = dz$, $dy = 0$. Bularni (7) ga qo`yib, $B(dx) = 2ydx^2$ ni olamiz. Statsionar nuqtada $B = -5dx^2 < 0$, ya'ni $(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4})$ nuqtada

$f_{max} = \dfrac{605}{32}$ ga teng bo'lgan maximumga ega bo'lamiz.

**Misol 4.** $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ funksiyaning $y - x = \dfrac{\pi}{4}$ sharti ostida ekstremumi topilsin.

**Yechish.** Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$\Phi(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda(y - x - \frac{\pi}{4}).$$

$\lambda$ va ekstremum mumkin bo`lgan nuqtalarning koordinatasini aniqlash uchun mos sistemasini yozamiz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = -2\cos x \sin x - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = -2\cos y \sin y + \lambda = 0, \\ y - x - \dfrac{\pi}{2} = 0, \end{cases}$$

yoki

$$\sin 2x = -\lambda\,, \tag{8}$$

$$\sin 2y = \lambda\,, \tag{9}$$

$$y - x = \frac{\pi}{4}. \tag{10}$$

(7) va (8) dan $\sin 2x + \sin 2y = 0$ yoki

$$2\sin(x + y)\cos(y - x) = 0 \tag{11}$$

ga ega bo'lamiz. (10) dan $\cos(y-x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$ ga **egamiz. (11) dan** esa $\sin(x + y) = 0$, bundan

$$x + y = k\pi\,, k = 0, \pm 1, \pm 2, \tag{12}$$

ni topamiz. (14) va (16) tenglamalarni birgalikda yechib,

$$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \qquad y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ga ega bo`lamiz. $\Phi(x, y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz.

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = -2\cos 2x\,, \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -2\cos 2y\,.$$

$P_K(\frac{K\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{8})$ nuqtada

$$\Phi''_{xx}\,\Phi''_{yy} - (\Phi''_{xy})^2 = 4\cos(\kappa\pi - \frac{\pi}{4})\cos(\kappa\pi + \frac{\pi}{4}) = 2\cos 2k\pi = 2 > 0\,,$$

ga ega bo'lamiz. Demak, $P_K(\frac{K\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{8})$ nuqtada shartli ekstremum mavjud. So'ngra, $k = 2\pi k$ da $\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right|_{P_{2n}} = -\sqrt{2} < 0$ bo'ladi, shuning uchun $P_{2n}$ nuqtada shartli maximum $z_{max} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, ga teng, $k = 2n + 1$ da $\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right|_{P_{2n+1}} = \sqrt{2} > 0$ bo'ladi, yani $P_{2n+1}$ nuqtada shartli minimum $z_{min} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ga teng bo'ladi.

Quyidagi masalalarda shartli ekstremum topilsin:

**14.** $x^2 + y^2 = 1$ sharti ostida $f = xy$.

**15.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ sharti ostida $f = x^2 + y^2$.

16. $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=8$ shartlar ostida $f=xyz$.
17. $x+y=a$ sharti ostida $f=e^{xy}$.
18. , $x^2+y^2=1$ sharti ostida $f=6-4x-3y$.
19., $x^2+y^2+z^2=1$ sharti ostida $f=x-2y+2z$.
20. $x+y+z=\frac{\pi}{2}$, $x>0, y>0, z>0$ shartlar ostida $f=\sin x \sin y \sin z$.
21. $\frac{x^n+y^n}{2}\geq(\frac{x+y}{2})^n$ , $n\geq 1$, $x\geq 1$, $y\geq 0$, tengsizlikni isbotlang.
22. Manfiy bo`lmagan $x, y, z, t$ sonlar yig`indisi o`zgarmas $x+y+z+t=4c$ kattalikni saqlaydi sharti ostida xyzt ko'paytmaning eng katta qiymati topilsin.
23. $M(1,0)$ nuqtadan $4x^2+9y^2=36$ ellipsgacha bo`lgan eng qisqa masofa topilsin.
24. $y=x^2$ parabola bilan $x-y=5$ to`g`ri chiziq orasidagi masofa topilsin.
25. $x^2+y^2=R^2$ aylanaga ichki chizilgan eng katta yuzaga ega bo`lgan to`rtburchak-
ning tomonlari topilsin.
26. $R$ radiusli sharga eng katta to'la sirtga ega bo`lgan silindr ichki chizilsin.

# II BOB

# FUNKSIONALLARNING EKSTREMUMLARI

## 3 §. Funksional. Funksional variatsiyasi va uning xossalari

$1^0$. ***Funksionalning ta'rifi. Egri chiziqlarning yaqinligi.*** Aytaylik, $y(x)$ funksiyalarning biror $M$ sinfi berilgan bo'lsin. Agar har bir $y(x) \in M$ funksiya uchun biror qonuniyat asosida $J$ soni mos qo'yilgan bo'lsa, u holda $M$ sinfda $J$ funksional aniqlangan deyiladi va $J = J[y(x)]$ kabi yoziladi.

$J[y(x)]$ funksional aniqlangan $y(x)$ funksiyalarning $M$ sinfi funksionalning berilish sohasi deyiladi.

**Misol 1.** Aytaylik, $M = C[0,1]$ $[0,1]$ kesmada berilgan uzluksiz $y(x)$ funksiyalar sinfidan va funksional

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x)dx \tag{1}$$

dan iborat bo'lsin. U holda $J$ funksional $y(x)$ ga bog'liq bo'ladi, ya'ni, har bir $y(x) \in C[0,1]$ funksiyaga $J[y]$ funksionalning aniq qiymati mos keladi. (1) dagi $y(x)$ ning o'rniga aniq bir funksiya qo'yib, $J[y(x)]$ funksionalning shu funksiyadagi mos qiymatini hisoblaymiz. Shunday qilib, agar $y(x) = 1$ bo'lsa, u holda

$$J[1] = \int_0^1 dx$$

bo'ladi ; agar $y(x) = e^x$ bo'lsa, u holda

$$J[e^x] = \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

bo'ladi ; agar $y(x) = \cos \pi x$ bo'lsa, u holda

$$J[\cos \pi x] = \int_0^1 \cos \pi x dx = 0$$

bo'ladi.

**Misol 2.** $M = C_1[a,b]$ $[a,b]$ kesmada birinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lgan $y(x)$ funksiyalar sinfidan va funksional

$$J[y(x)] = y'(x_0)\text{, bu erda } x_0 \in [a,b],$$

dan iborat bo'lsin. Ravshanki, $J[y(x)]$ ko'rsatilgan funksiyalar sinfida aniqlangan funksional bo'ladi. Bu sinfga tegishli har bir funksiyaga bu funksiyaning fiksirlangan $x_0$ nuqtadagi hosilasining son qiymati mos qo'yiladi. Agar, masalan $a = 1, b = 3$ va $x_0 = 2$ bo'lsa, u holda $y(x) = x^2$ funksiya uchun

$J[x^2]=2x\big|_{x=2}=4$ ; $y(x)=x^2+1$ funksiya uchun $J[x^2+1]=4$ ; $y(x)=\ln(1+x)$ funksiya uchun $J[\ln(1+x)]=\frac{1}{3}$ qiymatlarga ega bo'lamiz.

**Misol 3.** M =C[-1,1] –[-1,1] kesmadagi uzluksiz y(x) funksiyalar sinfidan hamda $\varphi(x,y)$- barcha $-1\le x\le 1$ larda va haqiqiy y larda aniqlangan uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. U holda

$$J[y(x)]=\int_{-1}^{1}\varphi[x,y(x)]dx;$$

berilgan sinfda aniqlangan funksional bo'ladi. Masalan, agar $\varphi(x,y)=\frac{x}{1+y^2}$ bo'lsa, u holda y(x)=x funksiya uchun

$$J[y(x)]=\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+x^2}dx=0$$

bo'ladi; y(x)=1+x funksiya uchun

$$J[1+x]=\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+(1+x)^2}dx=\ln\sqrt{5}-arctg2$$

qiymatlarga ega bo'lamiz.

**Misol 4.** M=$C_1$[a,b]-[a,b] kesmada y'(x) uzluksiz hosilaga ega bo'lgan y(x) funksiyalar sinf bo'lsin. U holda

$$J[y(x)]=\int_{a}^{b}\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (2)$$

shu funksiyalar sinfida aniqlangan funksional bo'ladi. (2) funksional geometrik nuqtai nazardan oxirlari A(a,y(a)) va B(b,y(b)) nuqtalarda bo'lgan y= y(x) egri chiziq yoyning uzunligini ifodalaydi.

y(x) argumentli J[y(x)] funksionalning *orttirmasi* yoki *variatsiyasi* δy, deb tanlangan M sinfga tegishli ikki y(x) va $y_0(x)$ funksiyalarning ayirmasiga aytiladi

$$\delta y=y(x)-y_0(x).$$

k marta differensiallanuvchi funksiyalar sinfi uchun

$$\delta y)^{(k)}=\delta y^{(k)}(x)$$

ga egamiz.

[a,b] kesmada berilgan y= y(x) va y= $y_1(x)$ egri chiziqlar yaqinligi nolinchi tartibli ma'nosida yaqin deyiladi , agar | y(x)- $y_1(x)$| [a,b] kesmada kichik miqdor bo'lsa. Bu egri chiziqlarning [a,b] kesmadagi ordinatasi bo'yicha yaqinligi uning geometrik ma'nosini anglatadi.

[a,b] kesmada berilgan y= y(x) va y= $y_1(x)$ egri chiziqlar yaqinligi birinchi tartibli ma'nosida yaqin deyiladi , agar | y(x)- $y_1(x)$| va |y'(x)- $y'_1(x)$| miqdorlar [a,b] kesmada kichik miqdorlar bo'lsa. Geometrik ma'nosi bu egri chiziqlarning [a,b] kesmadagi ham ordinatasi bo'yicha, ham mos nuqtalarda urinmalarining yo'nalishlari bo'yicha yaqinligini anglatadi.

[a,b] kesmada berilgan $y= y(x)$ va $y= y_1(x)$ egri chiziqlar yaqinligi k-tartibli yaqinlik ma'nosida yaqin deyiladi, agar

$$|y(x)- y_1(x)|, \quad |y'(x)- y'_1(x)|, \quad \ldots \quad ,|y^{(k)}(x)- y_1^{(k)}(x)|$$

miqdorlar [a,b] kesmada kichik miqdorlar bo'lsa.

Agar chiziqlar yaqinligi k-tartibli yaqinlik ma'nosida bo'lsa, u holda ular ixtiyoriy kichik tartibli yaqinlikda yana ham yaqinroq bo'ladi.

**Misol 5.** $y(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$, bu erda n yetarlicha katta son, va $y_1(x)=0$ egri chiziqlar $[0,\pi]$ kesmada nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida yaqin, chunki

$$|y(x)- y_1(x)|= \left|\frac{\sin n^2 x}{n}\right| \leq \frac{1}{n},$$

bo'ladi, ya'ni butun $[0, \pi]$ oraliqda bu ayirma modul bo'yicha yetarlicha katta n sonidan kichik. $|y'(x)- y'_1(x)|=n|\cos n^2x|$, bo'lganligi sababli birinchi tartibli yaqinlik yo'q, masalan, $x=\frac{2\pi}{n^2}$ nuqtada $|y'(x)- y'_1(x)|=n$ ga ega bo'lamiz. Demak, $|y'(x)- y'_1(x)|$ ayirmaning modulini n ning etarlicha katta qiymatiga qarab yetarlicha kattalashtirishimiz mumkin.

**Misol 6.** $[0,\pi]$ kesmada $y(x) =\frac{\sin nx}{n^2}$, bu erda n yetarlicha katta son, va $y_1(x)=0$ egri chiziqlar $[0,\pi]$ kesmada 1- tartibli yaqinlik ma'nosida yaqin,

$$|y(x)- y_1(x)|= \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{va} \quad |y'(x)- y'_1(x)|=\left|\frac{\cos nx}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

ya'ni birinchi tartibli ma'nosida yaqin hisoblanadi.

Quyidagi misollarda egri chiziqlarning yaqinlik tartibi aniqlansin.

27. $[0,2\pi]$ kesmada $y(x)=\frac{\cos nx}{n^2+1}$, $y_1(x)\equiv 0$.

28. $[0,\pi]$ kesmada $y(x)=\frac{\sin x}{n}$, $y_1(x)\equiv 0$.

29. [0,1] kesmada $y(x)=\sin\frac{x}{n}$, $y_1(x)\equiv 0$.

$y=f(x)$ va $y=f_1(x)$, $(a\leq x \leq b)$, *egri chiziqlar orasidagi masofa* deb qiymati $a\leq x \leq b$ kesmada $|f_1(x) - f(x)|$ modulning maksimumiga teng bo'lgan manfiy bo'lmagan $p$ soniga aytiladi:

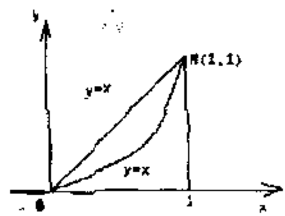
$$p = p[f_1(x), f(x)] = \max_{a\leq x\leq b} |f_1(x) - f(x)|,$$

bu erda $f(x)$, $f_1(x)$ lar - [a,b] kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar.

***Misol 7.*** *[0,1] kesmada $y=x$ va $y=x^2$ egri chiziqlar orasidagi $p$ masofa* topilsin (1-rasm).

**Yechish.** Ta'rifga ko'ra, $p = \max\limits_{0\le x\le 1}|x^2 - x|$, **yoki** $p = \max\limits_{0\le x\le 1}(x - x^2)$ $[0,1]$ kesmaning
oxirlarida $y = x - x^2$ funksiya nolga teng bo'ladi. $[0,1]$ kesmada $y = x - x^2$ funksiyaning **maximumini topamiz** $y' = 1 - 2x$; $x = \frac{1}{2}$ da $y' = 0$ bo'ladi, bundan

$$p = \max_{0\le x\le 1} y = (x - x^2)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$




1-rasm

Quyidagi berilgan **misol**larda ko'**rsatilgan kesmada egri chiziqlar** orasidagi masofa topilsin:

**30.** $[0,2]$ kesmada $f(x) = xe^{-x}$, $f_1(x) \equiv 0$.
**31.** $[0, \pi/2]$ kesmada $f(x)=\sin 2x$, $f_1(x)=\sin x$.
**32.** $[e^{-1}, e]$ kesmada $f(x)=x$, $f_1(x)=\ln x$.

Aytaylik, $y=f(x)$ va $y=f_1(x)$ egri chiziqlar $a \le x \le b$ kesmada n-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsin. $y=f(x)$ va $y=f_1(x)$ *chiziqlar orasidagi n-tartibli masofa* deb, $[a, b]$ kesmadagi quyidagi miqdorlar maksimumlarining eng kattasiga aytiladi:

$$| f_1(x) - f(x) |, | f_1'(x) - f'(x) |, \ \ldots, \ | f_1^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) |.$$

Bu masofani quyidagicha belgilaymiz:

$$p_n = p_n[f_1(x), f(x)] = \max_{0\le k\le n} \max_{a\le x\le b} \left| f_1^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) \right|.$$

**Misol 8.** $0 \le x \le 1$ kesmada $f(x) = x^2$ va $f_1(x) = x^3$ egri chiziqlar **orasidagi** birinchi tartibli masofa topilsin.

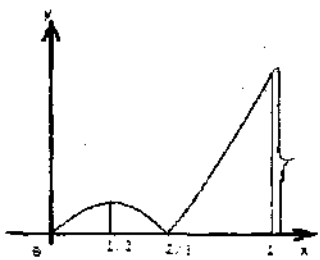
**Yechish.** Ushbu berilgan funksiyalarning hosilalarini topamiz $f_1'(x)=3x^2$, $f'(x)=2x$ va $y_1=x^2-x^3$ $y_2=2x-3x^2$ funksiyalarni qaraymiz. Ularning [0,1] kesmadagi eng katta qiymatlarini topamiz, natigada $y_1'=2x-3x^2$ ga ega bo'lamiz. Hosilani nolga tenglab, $y_1(x)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz : $x_1=0$, $x_2=2/3$. So'ngra, $y_1|_{x=0}=0$ ; $y_1|_{x=2/3}=4/27$, $y_1(x)$ ning o'ng chegaradagi qiymati $y_1(1)=0$ bo'ladi. Bundan

$$p_0 = \max_{0\le x\le 1}\left|x^3 - x^2\right| = \max_{0\le x\le 1}(x^3 - x^2) = \frac{4}{27};$$

Endi $f'(x)=2x$ va $f_1'(x)=3x^2$ hosilalar orasidagi nolinchi tartibli masofani topamiz

$$p_0' = \max_{0\le x\le 1}\left|y_2'(x)\right| = \max\left|2x-3x^2\right|.$$

$y=|2x-3x^2|$ funksiyaning grafigini chizamiz (2-rasm).




2-rasm

Rasmdan ko'rinadiki, $p_0$=1 ga teng. Shunday qilib, $f(x)=x^2$ va $f_1(x)=x^3$ chiziqlar orasidagi birinchi tartibli masofa

$$p_1=\max(p_0,p'_0)=1.$$

**33.** $[e^{-1},e]$ kesmada $f(x)=\ln x$ va $f_1(x)=x$ egri chiziqlar orasidagi birinchi tartibli masofa topilsin.

**34.** $[0,\pi/3]$ kesmada $f(x)=x$ va $f_1(x)=-\cos x$ egri chiziqlar orasidagi ikkinchi tartibli masofa topilsin.

**35.** [0,1] kesmada $f(x)=e^x$ va $f_1(x)=x$ egri chiziqlar orasidagi 1001- tartibli masofa topilsin.

$y=f(x)$ egri chiziqning n- tartibli ε atrofi deb, shunday $y=f_1(x)$ egri chiziqlar to'plamiga aytiladiki, $y=f(x)$ egri chiziq bilan orasidagi n-tartibli masofa ε dan kichik bo'ladi

$$p_n=p_n[f(x), f_1(x)]<\varepsilon.$$

$y= f(x)$ funksiyaning kuchli $\varepsilon$ atrofiga nolinchi tartibli $\varepsilon$-atrofi, deb aytiladi.

$y= f(x)$ egri chiziqning kuchli $\varepsilon$ atrofi, eni $2\varepsilon$ ga teng bo'lgan polosada yotuvchi $y= f(x)$ egri chiziqning atrofidagi egri chiziqlardan iborat.

$y= f(x)$ funksiyaning kuchsiz $\varepsilon$ atrofiga birinchi tartibli $\varepsilon$-atrofi, deb aytiladi.

$2^0$. ***Funksionalning uzluksizligi.*** $y(x)$ funksiyalarning M sinfida aniqlangan $J[y(x)]$ funksional $y=y_0(x)$ da n-tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun, shunday $\eta>0$ soni topilsaki,

$$|y(x)-y_0(x)|<\eta,\ |y'(x)-y'_0(x)|<\eta,\ldots,\ |y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)|<\eta,$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha joiz $y=y(x)$ funksiyalar uchun $|J[y(x)]-J[y_0(x)]|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa. Boshqacha so'z bilan aytganda, $|J[y(x)]-J[y_0(x)]|<\varepsilon$ bo'ladi, agarda $y(x)$ joiz funksiya bilan $y=y_0(x)$ orasidagi masofa uchun $\rho_n[y(x), y_0(x)]<\eta$ tengsizlik bajarilsa.

n-tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz bo'lmagan funksionalni n-tartibli yaqinlik ma'nosida uzilishga ega bo'lgan funksional, deb ataladi.

$$y^{(k)}(x)= y_0^{(k)}(x)+\alpha\omega^{(k)}(x),\ (k=0,1,2,\ldots,n),$$

$\alpha$-qandaydir parametr, $\omega(x)$ -M sinfdan olingan ixtiyoriy funksiya, deb olib,

$$\lim_{\alpha\to 0} y^{(k)}(x)=y_0^{(k)}(x), \qquad (k=0,1,2,\ldots,n),$$

ekanligini bilamiz va funksionalni $y(x)= y_0(x)$ dagi uzluksizlik ta'rifini quyidagicha yozishimiz mumkin

$$\lim_{\alpha\to 0} J[y_0(x)+\alpha\varpi(x)]=J[y_0(x)].$$

**Misol 9.** $C_1[0,1]$ fazoda aniqlangan $J[y(x)]=\int_0^1 [y(x)+2y'(x)]dx$ funksionalni $y_0(x)=x$ funksiyada birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz ekanligini ko'rsating.

**Yechish.** ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonini olamiz. U holda shunday $\eta>0$ soni mavjudki, faqat $|y(x)-x|<\eta$ va $|y'(x)-1|<\eta$ bajarilganga, $|J[y(x)]-J[y_0(x)]|<\varepsilon$ munosabat o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

$$|J[y(x)]-J[x]|=\left|\int_0^1 [y(x)+2y'(x)-x-2]dx\right|\le \int_0^1 |y(x)-x|dx+2\int_0^1 |y'(x)-1|dx,$$

egamiz. Endi $\eta=\varepsilon/3$ deb tanlaymiz. U holda barcha $y(x)\in C_1[0,1]$ larda $|y(x)-x|<\varepsilon/3$, $|y'(x)-1|<\varepsilon/3$, bo'lib, $|J[y(x)]-J[x]|<\varepsilon$ ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, barcha , $\varepsilon>0$ uchun, $\eta>0$ son mavjud. Bu esa ta'rifga ko'ra berilgan funksionalning $y_0=x$ funksiyada birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz ekanligini anglatadi. Bu funksionalni barcha $y(x)\in C_1[0,1]$ egri chiqlarda birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz ekanligini ko'rish qiyin emas.

**Misol 10.** $J[f(x)] = f'(x_0)$ funksionalni ko'rib chiqamiz, bu erda $f(x) \in C_1[a,b]$ va $x_0 \in C_1[a,b]$. Bu funksional, ixtiyoriy $f(x)$ funksiyada nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzilishga ega. Aytaylik, $\varphi(x)$ funksiya [a,b] oraliqda quyidagicha $\varphi'(x_0)=1$ va $|\varphi(x)|< \eta$ bo'lsin. Quyidagi $f(x)=f_0(x)+\varphi(x)$, $f_0(x) \in C_1[a,b]$ funksiyani olamiz. U holda $f'(x_0)= f'_0(x_0)+1$ bo'ladi. Ravshanki, $p[f(x), f_0(x)]< \eta$ bo'ladi, ya'ni $f(x)$ va $f_0(x)$ egri chiziqlar nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida yaqin. Bir vaqtning o'zida $|J[f(x)] - J[f_0(x)]|=1$, ya'ni funksionalning qiymatlari $f_0(x)$ va $f(x)$ larning hech bir argumentida nolinchi tartibli yaqinlikga ega emas. Aniqroq qilib aytganda, shunday $\varepsilon>0$ ($\varepsilon<1$) soni mavjudki, $\eta>0$ qanday bo'lishidan qatiy nazar, shunday $f(x)$ topiladiki, natijada $p_0[f,f_0]< \eta$ va $|J[f] - J[f_0]|> \varepsilon$ bo'ladi. Bu esa $J[f]$ funksionalni nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzilishga ega ekanligini bildiradi.

Endi, bu funksionalni birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonini olamiz. $|J[f(x)] - J[f_0(x)]|= |f'(x_0)-f'_0(x_0)|$ egamiz. Agar $\eta = \varepsilon$ deb tanlasak, u holda $p_1[f(x), f_0(x)] < \eta$ bo'lganda $|J[f(x)] - J[f_0(x)]|< \varepsilon$ ga ega bo'lamiz, bu esa berilgan funksionalni birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz ekanligini bildiradi.

**Misol 11.** $C[0,\pi]$ fazoda aniqlangan $J[y(x)] = \int_0^{\pi} y'^2(x)dx$ funksionalni ko'rib chiqamiz. Bu funksional $y_0(x)=0$ funksiyada nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzilishga ega ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, $[0,\pi]$ da $y_0(x)=0$ va $y_n(x)=\sin nx/n$ bo'lsin. U holda $p_0[y_0(x), y_n(x)]=1/n$ va $n\to\infty$ da $\rho_0 \to 0$ bo'ladi. Boshqa tarafdan, ayirma

$$J[y_n(x)] - J[y_0(x)] = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 nx}{n} dx = \frac{\pi}{2}$$

ga teng bo'lib, n ga bog'liq bo'lmaydi. Shunday qilib, $J[y_n(x)]$ funksional, $J[y_0(x)]=0$ funksionalga intilmaydi, va bundan berilgan funksionalni $y_0(x)=0$ da nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzilishga ega ekanligini ko'rish mumkin.

Muhtaram o'quvchiga qaralayotgan funksional $y_0(x)=0$ da birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzuluksiz ekanligini isbotlfshni havola qilamiz.

Quyidagi funksionallar uzluksizlikka tekshirilsin:

36. $J[y(x)]=y(x_0)$, bu yerda $y(x)\in C[a,b]$ va $x_0 \in [a,b]$, nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida.
37. $J[y(x)]=\max[y(x)]$, bu yerda $y(x)$ funksiya [a,b] kesmada uzluksiz (nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida )

**38.** $L[y(x)] = \begin{cases} 0, & agar \quad y(x) \text{ hech bolmaganda bitta manfiy qiymatni qabul qilsa,} \\ \dfrac{1}{2}, & agar \quad y(x) = 0 \text{ bolsa,} \\ 1, & \text{agar } y(x) \geq 0, \quad y(x) \neq 0, \text{ nolinchi tartibli yaqinlik manosida.} \end{cases}$

**39.** $J[y(x)] = \int_0^1 |y'(x)|dx$, bu yerda y(x) [0,1] kesmada uzluksiz birinchi tartibli

hosilaga ega funksiya: a) nolinchi tartibli yaqinlashuvchi ma'nosida, b) birinchi

tartibli yaqinlik ma'nosida.

**40.** $J[y(x)] = \int_0^{\pi} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ funksional $y_0(x) = 0$ funksiyada, bu yarda $y(x) \in [0,\pi]$

funksiya:

a) nolinchi tartibli yaqinlik manosida, b) birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida.

**41.** $J[y(x)] = \int_0^{\pi} (1+2y'^2(x))dx$ funksional $y_0(x) = 0$ funksiyada, bu yerda

$y(x) \in C_1[0,\pi]$,

birinchi tartibli yaqinlik ma'nosida.

**Misol 12.** $y(x) \in C[0,1]$ funksiyalar to'plamida aniqlangan $J[y(x)] = \int_0^{\pi} x^3\sqrt{1+y^2(x)}dx$ funksionalni $y_0(x)=x^2$ funksiyada nolinchi tartibli yaqinlik ma'nosida uzluksiz ekanligini ko'rsatilsin.

**Yechish.** $y(x)=x^2+\alpha\mu(x)$ deb olamiz, bu yerda $\mu(x) \in C[0,1]$, $\alpha$-ixtiyoriycha kichik son,

$$J[y(x)] = J[x^2 + \alpha\mu(x)] = \int_0^{\pi} x^3\sqrt{1+(x^2+\alpha\mu(x))^2}dx = \int_0^{\pi} x^3\sqrt{1+x^4+2\alpha x^2\mu(x)+\alpha^2\mu^2(x)}dx.$$

Bu tenglikdan $\alpha \to 0$ intilganda limitga o'tib quyudagi ifodani olamiz

$$\lim_{\alpha\to 0} J[y(x)] = \int_0^{\pi} x^3\sqrt{1+x^4}dx = J[x^2]$$

bu esa funksionalni $y_0=x^2$ funksiyada uzluksiz ekanligini bildiradi.

**Ta'rif.** $M$ $y(x)$ funksiyalarning chiziqli normallangan fazosi bo'lsin. $M$ fazoda aniqlangan $L[y(x)]$ funksional chiziqli deyiladi, agar u quyudagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) $L[Cy(x)] = CL[y]$, bu erda c-ixtiyoriy o'zgarmas,

2) $L[y_1(x)+y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$, bu erda $y_1(x), y_2(x) \in M$.

Misol uchun $C_1[a,b]$ da aniqlangan $L[y(x)]=\int_a^b [y'(x)+y(x)]\,dx$ ni ko'rib chiqaylik, bu funksional ko'rinib turibdiki, chiziqli.

Chiziqli funksionalning boshqacha ta'rifi.

$L[y(x)]$ funksional chiziqli deyiladi, agar u: 1) uzluksiz; 2) ixtiyoriy $y_1(x), y_2(x) \in M$ funksiyalar uchun quyidagi shartni qanoatlantirsa

$$L[y_1(x)+y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)].$$

42. Yuqorida keltirilgan funksionalning chiziqliligi to'g'risidagi ta'riflarni ekvivalentligi ko'rsatilsin.

43. $L[y(x)] = y(x_0)$ - funksionalni chiziqli ekanligi ko'rsatilsin.

44. Agar, $L[y(x)]$ - chiziqli funksional va $\|y(x)\| \to 0$ da munosabat $\dfrac{L[y(x)]}{\|y(x)\|} \to 0$

bo'lsa, u holda $L[y(x)] = 0$ bo'lishligi ko'rsatilsin.

**3°. *Funksionalning variatsiyasi.*** Aytaylik, $y(x)$ funksiyalar to'plami $M$ da $L[y(x)]$ funksional berilgan bo'lsin. Ushbu funksionalni $\delta y(x)$ orttirmasi, deb

$$\Delta J = \Delta J[y(x)] = J[y + \delta y(x)] - J[y(x)]$$

($\delta y(x) = \overline{y(x)} - y(x)$ bu yerda $y(x) \in M$, $\overline{y(x)} \in M$) kattalikka aytiladi.

**Misol 13.** Agar $y(x) = x$, $y_1(x) = x^2$ bo'lsa, $C_1[a,b]$ fazoda aniqlangan $L[y(x)] = \int_0^1 y(x)y'(x)dx$, funksionalning orttirmasi topilsin.

**Yechish.** Ta'rifga ko'ra,

$$\Delta J = J[x^2] - J[x] = \int_0^1 x^2\, 2x dx - \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \int_0^1 (2x^3 - x)dx = 0$$

ga ega bo'lamiz.

45. $y(x) = e^x$, $y_1(x) = e^x$ deb olib, 13-misolda berilgan funksionalning orttirmasi topilsin.

**Ta'rif.** Agar funksional orttirmasini $\Delta J = L[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)]$

$$\Delta J = L[y(x), \delta y(x)] + \beta(y(x), \delta y)\| \delta y \|$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, bu yerda $L[y(x), \delta y(x)]$ $\delta y$ ga nisbatan chiziqli funksional va $\|\delta y\| \to 0$ da $\beta(y(x), \delta y) \to 0$ bo'ladi, yani $L[y(x), \delta y(x)]$ ifoda funksionalning variatsiasi deb ataladi va $\delta J$ bilan belgilanadi. Bu holda $J[y(x)]$ funksional $y(x)$ nuqtada diffrensiollanuvchi bo'ladi.

46. $J[y(x)]$ funsianalning $\delta J$ variatsiyasi (agar u mavjud bo'lsa) faqat yagona tarzda aqinlanadi.

**Misol 14.** $C[a,b]$ fazoda aniqlangan $J[y(x)] = \int_a^b y(x)dx$ funksionalning har bir $y(x)$ nuqtada differensiyallanuvchiligi ko'rsatilsin.

**Yechish.** Ta'rifga ko'ra,

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b [y(x) + \delta y(x)]dx - \int_a^b y(x)dx = \int_a^b \delta y(x)dx.$$

Shunday qilib, $\Delta J = \int_a^b \delta y(x)$ ga ega bo'lamiz. Bu $\delta y(x)$ ga nisbatan chiziqli funksionalldir. Ushbu holatda funksionolning barcha orttirmalari $\delta y(x)$ ga nisbatan chiziqli funksionalga keltirildi. Qaralayotgan funksianol har bir $y(x)$ nuqtada differen-siyallanuvchi va uning variatsiyasi

$$\delta J = \int_a^b \delta y(x)dx$$

ga teng bo'ladi.

**47.** Har qanday chiziqli uzluksiz $J[y(x)]$ funk**sionalning har doim** differensiyalla-nuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

**Misol 15.** $C[a,b]$ fazoda aniqlangan

$$J[y] = \int_a^b y^2(x)dx$$

funksionalning har bir $y(x)$ nuqtada **differensiyalanuvchi ekanligini** ko'rsating.

**Yechish.** Quyidagiga egamiz

$$\Delta J = \int_a^b [y(x) + \delta y(x)]^2 dx - \int_a^b y^2(x)dx = \int_a^b 2y(x)\delta y(x)dx + \int_a^b (\delta y(x))^2 dx. \qquad (3)$$

(3) integralning o'ng tomonidagi 1-integral fiksirlangan har bir $y(x)$ funksiyada $\delta y(x)$ ga nisbatan chiziqli funksional bo'ladi. (3) integralning o'ng tomonidagi 2-integralni baholaymiz. Bundan $\|\delta y\| \to 0$ da quyidagi ifodaga ega bo'lamiz

$$\int_a^b (\delta y(x))^2 dx = \int_a^b |\delta y(x)|^2 dx \le (\max_{a \le x \le b} |\delta y(x)|)^2 \int_a^b dx = (b-a)\|\delta y(x)\|^2 = ((b-a)\|\delta y\|)\|\delta y\|.$$

Bundan $\|\delta y(x)\| \to 0$ da quyidagi ifoda kelib chiqadi

$$(b-a)\|\delta y\| \to 0.$$

Shunday qilib, ΔJ funksiyaning orttirmasi $L[y(x), \delta y(x)]$ ning $\|\delta y(x)\|$ ga nisbatan 2-tartibli kichik miqdorning yig'ndisi ko'rinishida bo'ladi. Ta'rifga ko'ra, berilgan funksional $y(x)$ nuqtada differensiyalanuvchi va uning variatsiyasi

$$\delta J = 2\int_a^b y(x)\delta y(x)dx$$

ga teng bo'ladi.

**48.** $J[y(x)] = \int_0^1 y^2(x)dx$ funksional uchun $y = 2x$, $\delta y = \alpha x^3$ **larni qo'ying va** $\alpha = 1; -0{,}1; 0{,}01$ da $\delta J$ bilan $\Delta J$ ni taqqoslang.

49. $J[y(x)]=\int_0^1 y^3(x)dx$ funksional uchun $y=e^x$, $\delta y=\alpha x$ larni qo'ying va $\alpha=1;0,1;0,01$
da $\delta J$ bilan $\Delta J$ ni taqqoslang.

50. Quyudagi funksiyonallarni differensiyallanuvchiligi tekshirilsin:

1). $C[a,b]$ fazoda $J[y]=y(a)$.

2). $C_1[a,b]$ fazoda $J[y]=y(a)$.

3). $C_1[a,b]$ fazoda $J[y]=\sqrt{1+y'^2(a)}$.

4). $C[a,b]$ fazoda $J[y]=|y(a)|$.

51. Agar $J[y]$ funksional differensiyallanuvchi bo'lsa, $J^2[y]$ funksionalni differen-
siyallanuvchiligini ko'rsating va $J^2[y]$ ning variyatsiyasini yozing.

52. $C[a,b]$ fazoda aniqlangan

$$J[y]=\int_a^b f(x,y(x))dx$$

funksionalning differensiyallanuvchiligi va uning veriatsiyasi

$$\delta J=\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\delta y(x)dx$$

ko'rinishga ega ekanligi ko'rsatilsin. Bu yerda $f(x,y)$ o'zining argumentlari bo'yicha uzluksiz hamda $a\le x\le b, -\infty<y<+\infty$, sohada ikkingchi tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega bo'lgan funksiya.

**Misol 16.** $[a,b]$ kesmada uzluksiz, 1- tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'gan funksiyalar fazosida aniqlangan $J[y]=\int_a^b f(x,y(x),y'(x))dx$ funksionalni qaraymiz. Bu yerda $f(x,y)$ o'zining argumentlari bo'yicha uzluksiz hamda $a\le x\le b, -\infty<y<+\infty,$, $-\infty<y'<+\infty$ sohada ikkingchi tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega bo'lgan funksiya. $\Delta J$ funksionalning $\delta y(x)$ ga to'g'ri keluvchi orttirmasini topamiz, bu erda $\delta y(x)\in C_1[a,b]$. Bundan

$$\Delta J[y]=\int_a^b [f(x,y+\delta y,y'+\delta y')-f(x,y,y')]dx \qquad (4)$$

ni hosil qilamiz. Teylor formulasiga asosan,

$$f(x,y+\delta y,y'+\delta y')-f(x,y,y')=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y'}\delta y'+R(x,y,y',\delta y,\delta y') \qquad (5)$$

ni olamiz. Bu yerda $R(x,y,y',\delta y,\delta y')$ Teylor formulasining qoldiq hadi deyiladi. (5)- ifodani (4)-formulaga qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\Delta J[y(x)]=\int_a^b (\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y')dx+\int_a^b R(x,y,y',\delta y,\delta y')dx \qquad (6)$$

(6)- formulaning o'ng tomonidagi 1-qo'shiluvchi $\delta y$ va $\delta y'$ larga nisbatan chiziqli. Aytaylik, $f(x,y,y')$ funksiyaning $y$ va $y'$ lar bo'yicha barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalari $y$ va $y'$ ning chegaralangan sohasida absolyut qiymat bo'yicha biror o'zgarmas $M>0$ sondan oshib ketmasin. U holda quyidagicha baho o'rinli bo'ladi

$$\int_a^b |R(x,y,y',\delta y,\delta y')|\,dx \le 2M\int_A^B \|\delta y\|^2 dx = 2M(b-a)\|\delta y\|^2 .$$

Bu yerda $\|\delta y\| = \max\limits_{a\le x\le b}(|\delta y|,|\delta y'|)$. Shunday qilib, (6)-formulaning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchi ifoda $\|\delta y\|$ ga nisbatan ikkinchi tartibli cheksiz kichik miqdor. Bundan, ta'rifga asosan $J[y]$ funksionalning $C_1[a,b]$ fazoda differensial-lanuvchiligi kelib chiqadi va uning variatsiyasi quyidagiga teng bo'ladi

$$\delta J[y(x))] = \int_a^b (\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y')dx . \qquad (7)$$

**Misol 17.** $J[y] = \int_{-1}^{1}(y'e^y + xy^2)dx$ funsionalning variatsiyasi topilsin.

**Yechish.** Ravshanki, $f(x,y,y') = y'e^y + xy^2$ funksiya $x,y,y'$ o'zgaruvchilar bo'yicha uzluksiz va $y,y'$ lar bo'yicha barcha tartibli xususiy hosilaga ega. Shuning uchun, berilgan funksional $C_1[-1,1]$ fazoda differensiallanuvchi va uning variatsiyasi (7) formulaga asosan quyidagiga teng

$$\delta J[y] = \int_{-1}^{1}(y'e^y + 2xy)\delta y + e^y\delta y')dx .$$

53. $J[y(x)] = \int_1^e (y'y + xy'^2)dx$ funksional uchun $y=\ln x$, $\delta y = \frac{k(x-1)}{e-1}$, **larni** qo'ying va $k=1; 0{,}1; 0{,}01$ da $\Delta J[y(x)]$ bilan $\delta J[y(x)]$ ni taqqoslang.

54. $J[y(x)] = \int_0^1 (x^2y'^2 + y^2)dx$ funksional uchun $y=x^2$, $\delta y = kx^3$ larni qo'ying va $k=1; 0{,}1; 0{,}01$ da $\Delta J[y(x)]$ bilan $\delta J[y(x)]$ ni taqqoslang.

55. $J[y(x)] = \int_0^{\pi} y'^2 \sin x dx$ funksional uchun $y=\sin x$, $\delta y = k\cos x$ larni qo'ying va $k=-1; 0{,}3; 0{,}03$ da $\Delta J[y(x)]$ bilan $\delta J[y(x)]$ ni taqqoslang.

56. Agar $f(x,z_1,z_2,\ldots,z_{m+1})$ funksiya $a<x<b$, $-\infty<z_k<+\infty$, $(k=1,2,\ldots,m+1)$, sohada barcha argumentlari bo'yicha 2-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$J[y] = \int_a^b f(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(m)}(x))dx$$

funksional $C_m[a,b]$ fazoda differensiallanuvchi va uning variatsiyasi

$$\delta J=\int_a^b f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'+...+\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\delta y^{(m)}\right)dx$$

ko'rinishda bo'lishini ko'rsating.

***4⁰. Funksional variatsiyasining ikkinchi ta`rifi.***

$J[y(x)]$ funksionalning $y=y(x)$ nuqtadagi variatsiyasi, deb $J[y(x)+\alpha\delta y(x)]$ funksionalni $\alpha$ parametr bo'yicha olingan hosilasining $\alpha=0$ dagi qiymatiga aytiladi , ya'ni

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y(x)+\alpha\delta y(x)]\Big|_{\alpha=0}=0.$$

Agar funksional variatsiyasi uning orttirmasini chiziqli bosh qismi sifatida mavjud bo'lsa, ya`ni 1-ta`rif ma`nosida bo'lsa, u holda variatsiya $\alpha$ parametr bo`yicha olingan hosilasining $\alpha=0$ dagi qiymatida mavjud bo'ladi va bu variatsiyalar ustma-ust tushadi.

**Misol 18.** **2-ta`rifdan** foydalanib, $J[y(x)]=\int_a^b y^2(x)dx$

funksionalning variatsiyasi topilsin.

**Yechish.** 1-ta`rifga asosan berilgan funksionalning **variatsiyasi** quyidagiga teng (15 misolga qarang):

$$\delta y=2\int_a^b y(x)\delta y(x)dx.$$

Variatsiyaning 2-ta'rifidan foydalanib, $J[y(x)]$ funksionalning **variatsiyasi** topib, quyidagiga ega bo`lamiz

$$J[y(x)+\alpha\delta y(x)]=\int_a^b(y(x)+\alpha\delta y(x))^2dx.$$

U holda

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y(x)+\alpha\delta y(x)]=2\int_a^b(y(x)+\alpha\delta y(x))\delta y(x)dx$$

va mos ravishda

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y(x)+\alpha\delta y(x)]\Big|_{\alpha=0}=2\int_a^b(y\delta y)dx$$

ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, 1- va 2- ta`riflar ma`nosida funksionalning variatsiyasi ustma-ust tushadi.

Quyidagi funksionallarning 2-ta'rif bo'yicha tegishli **fazolardagi** variatsiyasi topilsin:

57. $J[y(x)]=\int_a^b(x+y)dx$

58. $J[y(x)]=\int_a^b(y^2+y'^2)dx$

59. $J[y(x)] = y^2(0) + \int_0^1 (xy + y'^2)dx$

60. $J[y(x)] = \int_0^{\pi} y' \sin y dx$

61. $J[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_a^b f(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx$ funksionalning

variatsiyasi topilsin, bu yerda f uzluksiz, qandaydir chegaralangan $G$ sohada o`zining barcha
argumentlari bo`yicha uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lgan funksiya.

$5^0$. ***Funksionalning ikkinchi variatsiyasi.*** Ikki x va y elementlarga bog'liq $J[x,y]$ funksional bichiziqli deyiladi, agar mahkamlangan (fiksirlangan) $x$ da u $y$ ga bog'liq chiziqli funksionalni ifodalasa, $y$ da u $x$ ning chiziqli funksionali bo'lsa. Shunday qilib, $J[x,y]$ funksional bichiziqli deyiladi, agarda

$$J[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] = \alpha_1 J[x_1, y] + \alpha_2 J[x_2, y],$$
$$J[x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2] = \beta_1 J[x, y_1] + \beta_2 J[x, y_2],$$

bo'lsa.

Bichiziqli funksionalda $y = x$ deb olsak, u holda $L[x,x]$ kvadratik funksional deb ataluvchi funksionalni hosil qilamiz. Bichiziqli funksional chekli o'lchovli fazoda bichiziqli forma deyiladi.

Agar ixtiyoriy x element uchun $L[x,x] > 0$ bo'lsa, u holda $L[x,x]$ funksional musbat aniqlangan, deyiladi. Masalan,

1) J[x,y] = $\int_a^b A(t)x(t)y(t)dt$, ifoda bichiziqli funksionalni ifodalaydi, bu erda

$A(t)$ - fiksirlangan uzluksiz funksiya, $\int_a^b A(t)x^2(t)dt$ - esa $C[a,b]$ fazoda kvadratik

funksionalni ifodalaydi, hattoki, agar barcha $t \in [a,b]$ lar uchun $A(t) > 0$ bo'lsa, u holda kvadratik funksional musbat aniqlangan bo'ladi.

2) $\int_a^b [A(t)x^2(t) + B(t)x(t)x'(t) + C(t)x'^2]dt$ ifoda $C_1[a,b]$ fazodan olingan

funksiyalar uchun kvadratik funksionalga misol bo'ladi.

3) $\int_a^b \int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt$ integral $C[a,b]$ fazoda bichiziqli funksionalni beradi,

bu erda $K(s,t)$ ikki o'zgaruvchili fiksirlangan funksiya.

**Ta'rif.** Aytaylik, J[y] qaysidir chiziqli normallashgan fazoda aniqlangan funksional bo'lsin. J[y] funksional ikkinchi variatsiyaga ega deyiladi, agarda funksional orttirmasi ΔJ=J[y+$\delta y$]- J[y(x)] ni

$$\Delta J = L_1[\delta y] + \frac{1}{2}L_2[\delta y] + \beta\|\delta y\|^2$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, bu erda $L_1[\delta y]$ chiziqli funksional, $L_2[\delta y]$ esa kvadratik funksionalni ifodalaydi, $\beta \to 0$ da $\|\delta y\| \to 0$. $L_2[\delta y]$ kvadratik funksional J[y] funksionalning ikkinchi variatsiyasi (ikkinchi differensiali) deyiladi, va $\delta^2 J$ deb belgilanadi. Funksionalning ikkinchi variatsiyasi (agar u mavjud bo'lsa) bir qiymatli aniqlanadi.

**Misol 19.** y(x) funksiyalar $C_1[0,1]$ fazosida aniqlangan

$$J[y] = \int_0^1 (xy^2 + y'^3)dx$$

funksionalining ikkinchi variatsiyasi topilsin.

**Yechish.** Quyidagiga ega bo'lamiz

$$\Delta J = J[y+\delta y] - J[y] = \int_0^1 [x(y+\delta y)^2 + (y'+\delta y')^3 - xy^2 - y'^3]dx =$$

$$= \int_0^1 [2xy\delta y + x(\delta y)^2 + 3y'^2\delta y' + 3y'(\delta y')^2 + (\delta y')^3]dx = \int_0^1 [2xy\delta y + 3y'^2\delta y']dx +$$

$$+ \int_0^1 [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2]dx + \int_0^1 (\delta y')^3 dx. \qquad (8)$$

Fiksirlangan y(x) da (8) ifodaning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi $\delta y(x)$ ga nisbatan chiziqli funksionaldir, o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchi esa kvadratik funksional, va nihoyat, o'ng tomonidagi uchinchi qo'shiluchi quyidagi bahoda yaqqol ko'rinadi

$\left|\int_0^1 (\delta y')^3 dx\right| \le (\max|\delta y'|)^2 \int_0^1 |\delta y'|dx \le \int_0^1 |\delta y'|dx \|\delta y\|^2$ (C[0,1] fazodagi no'ma ma'nosida), bu yerdan ko'rinib turibdiki, ushbu qo'shiluvchini $\beta\|\delta y\|^2$ ko'rinishida ifodalash mumkin, bu yerda $\beta \to 0$ da $\|\delta y\| \to 0$ bo'ladi, berilgan funksional ta'rifga ko'ra, ikkinchi $\delta^2 J$ variatsiyaga ega va u quyidagiga teng

$$\delta^2 J = 2\int_0^1 [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2]dx.$$

**62.** Kvadrat funksionalni differensiallanuvshiligi isbotlansin va uning ikkinchi variatsiyasi topilsin.

**63.** $e^{F(y)}$ funksionalning ikkinchi variatsiyasi yozilsin, bu yerda F(y) ikki marta differensiallanuvchi funksional.

**64.** Agar integral ostidagi F funksiya 3-tartibgacha uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u

holda $C_1[a,b]$ fazoda J[y]=F(x,y, $y'$)dx ko'rinishdagi funksionalni ikki marta

differensiallanuvchiligi ko'rsatilsin va ikkinchi variatsiyasi uchun ifoda topilsin.

$\Phi(\alpha)$=J[y+$\alpha\delta y$] funksiyani kiritamiz. J[y] funksionalning $\delta^2 J$ ikkinchi variatsiyasi ham $\alpha$=0 nuqtada $\Phi(\alpha)$ funksiyaning ikkinchi hosilasi orqali aniqlanadi

$$\delta^2 J = \frac{d^2\Phi(\alpha)}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0}.$$

Ko'p hollarda biz qarayotgan integral ko'rinishdagi funksionallar uchun bu ikki ta'rif ustma-ust tushadi.

Quyidagi funksionallarning ikkinchi variatsiyasi topilsin:

**65.** $J[y]=\int_a^b F(x,y,y',...,y^{(n)})dx.$

**66.** $J[y]=\iint_G F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy.$

**67.** $J[y_1,y_2,...,y_n]=\int_a^b F(x,y,y_1,...,y_n,y_1',...,y_n')dx.$

***6⁰. Funksionalning ekstremumi. Ekstremumning zaruriy sharti.***

J[y(x)] funk-sional y=$y_0$(x) egri chiziqda maxsimumga erishadi, deyiladi agar J[y(x)] funksionalning qiymati unga yaqin bo'lgan y=$y_0$(x) egri chiziqdagi J[$y_0$(x)] funksionalning qiymatidan katta bo'lmasa, ya'ni

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \le 0.$$

Agar $\Delta J \le 0$ bo'lsa, bunda $\Delta J=0$, y(x)=$y_0$(x) , u holda y=$y_0$(x) egri chiziqda qat'iy maxsimumga erishadi, deyiladi. Xuddi shunday minimumni amalga oshuvchi y=$y_0$(x) egri chiziq uchun ham aniqlanadi. Bu holda y=$y_0$(x) egri chiziqqa yaqin barcha egri chiziqlarda $\Delta J \ge 0$ bo'ladi.

**Misol 20.** J[y(x)]= $\int_0^1 (x^2+y^2)dx$ funksionalni y(x)$\equiv$0 egri chiziqda qat'iy minimumga erishishi ko'rsatilsin.

**Yechish.** [0,1] kesmada har qanday uzluksiz y(x) funksiya uchun quyidagiga egamiz

$$\Delta J = J[y(x)] - J[0] = \int_0^1 (x^2+y^2)dx - \int_0^1 x^2dx = \int_0^1 y^2dx \ge 0,$$

bu yerda tenglikka faqat y(x)$\equiv$0 bo'lganda erishiladi.

***Kuchli va kuchsiz ekstrimumlar.*** J[y(x)] funksional y=$y_0$(x) egri chiziqda kuchli nisbiy maxsimumga erishadi deyiladi, agarda y=$y_0$(x) egri chiziqning qandaydir nolinchi tartibli $\varepsilon$ atrofida joylashgan barcha joiz y=y(x) egri chiziqlar uchun J[y(x)]$\le$ J[$y_0$(x)] tengsizlik o'rinli bo'lsa.

Funksionalning nisbiy minumimi ham xuddi shunday aniqlanadi.

J[y] funksionalning maxsimum va minumimlarini (kuchli va kuchsiz) nisbiy ekstremumlar deyiladi. Har qanday kuchli ekstremum bir vaqtning o'zida kuchsiz ekstremum bo'la oladi, biroq aksinchasi o'rinli emas. J[y] funksionalning ekstremumi aniqlangan funksiyalar jamlanmasi mutloq (absolyut) ekstrimumlar, deyiladi. Har qaysi mutloq (absolyut) ekstremum kuchli va kuchsiz nisbiy ekstremum hisoblanadi, biroq har qanday nisbiy ekistremum ham mutloq (absalyut) ekstremum bo'la olmaydi.

**Misol 21.** y(0)=y($\pi$)=0 shartni qanoatlantiruvchi $y(x)\in C_1[0,\pi]$ funksiyalar fazosida quyidagi

$$J[y(x)]=\int_0^{\pi} y^2(1-y'^2)dx$$

funksionalni qaraymiz.

OX o'qining $[0,\pi]$ kesmasi J ga kuchsiz minimum beradi. Haqiqatdan ham, $y\neq 0$ da J =0 ga ega bo'lamiz, ushbu kesmaning birinchi tartibli $\varepsilon$ - atrofida joylashgan barcha egri chiziqlar uchun, bu erda $\varepsilon$ - birdan kichik bo'lgan har qanday musbat son, $|y'|<1$ ga ega bo'lamiz, shunday qilib, integral ostidagi ifoda $y\neq 0$ da musbat va bundan kelib chiqadiki, funksiyonal faqat y=0 dagina nolga aylanadi. Demak, y=0 da funksiya kuchsiz minumimga erishadi. Kuchli minumimga esa erishmaydi. Bu holda

$y(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$, deb olish etarli. U holda

$$J[y(x)]=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin^2 nx(1-n\cos^2 nx)dx=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin^2 nxdx-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin^2 2nxdx=\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8}$$

va etarlicha katta n da bizning egri chiziq uchun J<0 bo'ladi. Boshqa tarafdan, bu yerga egri chiziqlar yetarlicha katta n da y=0 egri chiziqning nolinchi tartibli har qanday kichik atrofida yotadi. Shunday qilib, y=0 da kuchli minumimga erishilmaydi.

**Misol 22.** (Veyershtrass).

$$J[y]=\int_{-1}^{1} x^2y'^2dx,\quad y(-1)=-1,\quad y(1)=1,$$

funsiyanolni ko'rib chiqamiz. [-1;1] kesmada $J[y]\geq 0$ ga egamiz, chunki bunda J[y]=0 faqat $y'(x)=0$ bo'lgandagina bo'ladi, ya'ni $y(x)=c=const$. $y(x)=c$ funksiya [-1,1] *kesmada birinchi tartibli uzliksiz hosilaga ega bo'lgan, biroq* berilgan chegaraviy shartlarni qoniqtirmaydigan $C_1[-1,1]$ funksiyalar sinfiga mansub. Bundan kelib chiqadiki, y(-1)=-1 , y(1)=1 *shartlarni qoniqtiruvchi* barcha $y(x)\in C_1[-1,1]$ funksiyalar uchun J[y]>0 bo'ladi.

Shunday qilib, funksiyonal quyi chegaraga ega, biroq unga y(x) $)\in C_1[-1,1]$ egri chiziqlarda erishmaydi. Haqiqatdan ham, bir parametrli egri chiziqlar oilasini ko'raylik

$$y_\alpha(x)=\frac{arctg\frac{x}{\alpha}}{arctg\frac{1}{\alpha}},\qquad (\alpha>0).$$

Bu egri chiziqlar $y_\alpha(-1)=-1$, $y_\alpha(1)=1$ chegaraviy **shartlarni qonoat**lantiradi. Chegarada $\alpha \to 0$ da quydagi funksiyaga ega bo'lamiz

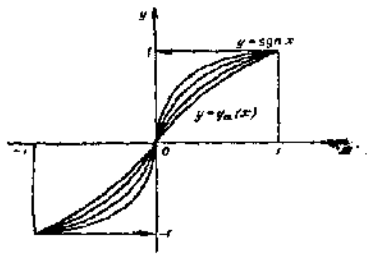
$$y(x)=\begin{cases} -1, & agar \quad -1 \le x < 0, \\ o, & agar \quad x=0, \\ +1, & agar \quad o < x \le 1, \end{cases}$$

yoki $y(x)=signx$ (3-rasm).

Bu funksiya [-1,1] kesmada bo'lakli differensiallanuvchi funksiyalar sinfiga mansub. Quyidagiga egamiz

$$J[y]=\int_{-1}^{1}\frac{\alpha x^2 dx}{(\alpha^2+x^2)arctg^2\frac{1}{\alpha}}=\frac{2\alpha}{arctg^2\frac{1}{\alpha}}\int_0^1\frac{x_2dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{2\alpha}{arctg^2\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha arctg\frac{1}{\alpha}).$$

Ma'lumki, $\alpha \to 0$ da $J\ [y_\alpha] \to 0$. $y(-1)=-1$, $y(1)=1$ chegaraviy shartlarni qoniqtiruvchi y(x) chegaraviy funksiyada J[y] funksiyonal nolga teng, yani J[y]=0 qiymat qabul qiladi.




3- rasm

Shunday qilib, J[y] funksiyonal o'zining minumumiga [-1,1] kesmada bo'lakli – differensiallanuvchi funksiyalar sinfiga mansub bo'lgan (lekin $C_1$[-1,1] sinfga mansub emas) $y(x)=signx$ egri chiziqda erishadi.

**Teorema** (Funksiyonal ekstremumining zaruriy sharti). Agar J[y(x)] different-siallanuvchi funksiyonal $y=y_0(x)$ da ekstremumga erishsa, bu erda $y_0(x)$ funksiyonalning aniqlanish sohasini ichki nuqtasi, u holda $y=y_0(x)$ da

$$\delta J[y_0(x)]=0 \tag{9}$$

bo'ladi. $\delta J=0$ qiluvchi funksiyalarni statsiyonar funksiyalar, deb ataladi.

Ekstremumning (9) zaruriy shartidan va variatsiyon hisobning asosiy lemmalaridan foydalanib, quyidagi funksiyonallarning statsionar funksiyalarini aniqlash uchun funksional tenglamalar topilsin.

**68.** $J[\varphi]=\int_a^b\int_a^b K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)dsdt+\int_a^b\varphi^2(s)ds-2\int_a^b\varphi(s)f(s)ds$, bu erda K(s,t)- D

$(a \le s \le b, a \le t \le b)$ sohadagi s va t larning uzliksiz simmetrik funksiyasi; f(s)- [a,b] kesmada berilgan uzliksiz funksiya, $\varphi(s)$-izlanayotgan uzluksiz funksional argumenti.

69. $J[\varphi] \int_{-\infty}^{+\infty} [p(x)\varphi'^2(x) + 2\varphi(x+1)\varphi(x-1) - \varphi^2(x) - 2\varphi(x)]dx$, bu erda $\varphi(x)$ funksiyonal argumenti uzliksiz va barcha $-\infty < x < +\infty$ intervalda bo'lakli uzliksiz hosilaga ega; p(x) – uzliksiz hosilaga ega, f(x) – uzliksiz funksiyalar.

70. $J[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} [p(x)\varphi'^2 + q(x)\varphi^2(x) - 2\varphi(x)f(x)]dx, \quad \varphi(x_0) = \varphi_0, \quad \varphi(x_1) = \varphi_1,$

bu erda p(x) uzliksiz hosilaga ega, q(x) va f(x) uzliksiz hamda $\varphi(x)$ ikki marta diferensiallanuvchi funksiyonal argument.

### 4 §. Variatsion hisobning sodda masalasi. Eyler tenglamasi

Bizga barcha argumentlari bo'yicha ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan $F(x,y,y')$ funksiya berilgan bo'lsin. Barcha $y(x)$ funksiyalar ichidan uzluksiz hosilaga ega bo'lgan va quyidagi chegaraviy shartlarni

$$y(a) = A \quad y(b) = B \tag{1}$$

qanoatlantiruvchi shunday funksiyani toppish kerakki, u

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x,y,y')dx \tag{2}$$

funksionalga kuchsiz ekstremum bersin. Boshqacha qilib aytganda, variatsion hisobning eng sodda masalasi, berilgan ikkita $P_1(a,A)$ va $P_2(b,B)$ nuqtalarni tutashtiruvchi barcha silliq egri chiziqlar to'plamida (2) ko'rinishidagi funksionalni kuchsiz ekstremumini topishdan iboratdir.

**1-Teorema** (kuchsiz ekstremumning zaruriy sharti). Birinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega (1) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi $y = y(x)$ funksiyalar to'plamida aniqlangan (2) funksional berilgan bo'lsin. $y(x)$ funksiyada (2) funksional ekstimumga erishishi uchun u funksiya

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \tag{3}$$

Eyler tenglamasini qanoatlantirishi zarur. Eyler tenglamasining integral egri chiziqlari ekstrimallar (Lagranj egri chiziqlari), deb ataladi. Eyler tenglamasi ochib yozilganda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y''(x)F_{y'y'} + y'(x)F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0, \; (F_{y'y'} \neq 0) \tag{4}$$

(4) tenglama ikkinchi tartibli differensial tenglamani ifodalaydi, shuning uchun uning umumiy yechimi ixtiyoriy ikkita o'zgarmasga bog'liq bo'ladi. Umuman olganda, bu o'zgarmaslar (1) chegaraviy shart orqali aniqlanadi. (2)

funksionalning ekstremumi faqat (1) shartni qanoatlantiruvchi ekstremallardagina amalga oshiriladi.

$$\left.\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, \\ y(a) = A, \quad y(b) = B, \end{aligned}\right\}$$

chegaraviy masala har doim ham yechimga ega bo'lavermaydi, agar yechimi mavjud bo'lsa u yagona bo'lmasligi mumkin. Shuni aytish lozimki, kuchsiz ekstremumning har qanday zaruriy sharti kuchli ekstremum uchun ham zaruriy shart hisoblanadi.

**Misol 1.** Qanday egri chiziqda

$$J[y(x)] = \int_0^2 (y'^2 - 2xy)dx, \qquad y(1) = 0, \ y(2) = -1$$

funksional ekstremumga erishadi?

**Yechish.** Bu yerda $F(x,y,y') = y'^2 - 2xy$ bo'lgani uchun Eyler tenglamasi $y'' + x = 0$ ko'rinishga ega bo'ladi. Eyler tenglamasining umumiy yechimi

$$y(x) = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

ko'rinishida bo'ladi. Chegaraviy shart, $C_1$ va $C_2$ larni aniqlash uchun chiziqli tenglamalar tizimini yozish imkonini beradi

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 = \frac{1}{6}, \\ 2C_1 + C_2 = \frac{2}{6}. \end{aligned}\right\}$$

Bu yerdan $C_1 = \frac{1}{6}$ $C_2 = 0$. Bundan esa berilgan funksionalning quyidagi

$$y(x) = \frac{x}{6}(1 - x^2)$$

egri chiziqa ekstremumga erishishi kelib chiqadi.

**Misol 2.** $J[y(x)] = \int_1^3 (3x - y)ydx$ funksionalni $y(1) = 1, y(3) = 4\frac{1}{2}$ **chegaraviy** shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

**Yechish.** Eyler tenglamasi 3x-2y=0 ko'rinishga ega. Bu yerdan $y(x) = \frac{3}{2}x$ ekstremal y(1)=1 shartni qanoatlantirmaydi. Demak, berilgan variatsion masala yechimga ega emas.

**Misol 3.** $J[y(x)] = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)dx$ funksionalni $y(0) = 1, y(2\pi) = 1$ **chegaraviy** shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

**Yechish.** Eyler tenglamasi $y'' + y = 0$ ko'rinishga ega , uning umumiy yechimi

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Chegaraviy shartlardan foydalanib, $y(x)=C\cos x+C\sin x$ ni olamiz, bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas. Shunday qilib, qo'yilgan variatsion hisob masalasi cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega.

Quyidagi funksionallarning ekstremallari topilsin:

71. $J[y]=\int_{-1}^{0}(12xy-y'^2)dx,\qquad y(-1)=1, y(0)=0.$

72. $J[y]=\int_{0}^{2}(y'^2+2xy'+y^2)dx,\qquad y(1)=1, y(2)=0.$

73. $J[y]=\int_{0}^{1}\sqrt{y(1+y'^2)}dx,\qquad y(0)=y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

74. $J[y]=\int_{0}^{1}yy'^2dx,\qquad y(0)=1, y(1)=\sqrt[3]{4}.$

75. $J[y]=\int_{0}^{\pi}(4y\cos x+y'^2-y^2)dx,\qquad y(0)=y(\pi)=0.$

76. $J[y]=\int_{0}^{1}(y'^2-y^2-y)e^{2x}dx,\qquad y(0)=0, y(1)=e^{-1}.$

77. $J[y]=\int_{-1}^{1}(y'^2-2xy)dx,\quad y(-1)=-1, y(1)=e^{-1}.$

78. $J[y]=\int_{-1}^{0}(y'^2-2xy)dx\quad y(-1)=0\ ,\ y(0)=2.$

79. $J[y]=\int_{1}^{e}(xy'^2+yy')dx,\quad y(1)=0, y(e)=1.$

(2) funksional uchun (3) Eyler tenglamasi bu ikkinchi tartibli differensial tenglamani ifodalaydi, shuning uchun uning $y=y(x)$ yechimi $y''(x)$ ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lishi kerak, biroq, $J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')dx$ funksional ekstremumga erishishi mumkin bo'lgan funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lmasligi ham mumkin.

**Misol 4.** $J[y(x)]=\int_{-1}^{1}y^2(x)(1-y'(x))^2dx$ funksional $y(-1)=0, y(1)=1$ chegaraviy shartlarda o'zining nolga teng bo'lgan minimumiga $v(x)=\begin{cases}0 & \text{agar } x\le 0,\\ x & \text{agar } x>0,\end{cases}$ funksiyada erishadi. Bu erda $v(x)$ funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega emas, lekin o'ziga mos Eyler tenglamasini qanoatlantiradi.

Haqiqatdan ham, $F(x,y,y')=y^2(1-y')^2)$ bo'lganligidan $y=v(x)$ deb faraz qilib, Eyler tenglamasini hosil qilamiz

$$2v(1-v')^2+\frac{\partial}{\partial x}\left[2v^2(1-v')\right]=0. \qquad (5)$$

Lekin $v(x)$ funksiya aniqlanishiga asosan [-1; 1] kesmada $F_{v'}=-2v^2(1-v')=0$ ga ega bo'lamiz. Demak, $\frac{\partial}{\partial x}F_{v'}=0$ va (5) Eyler tenglamasi formal ravishda ikkinchi tartibga ega, $v''(x)$ mavjud emas, lekin $v(x)$ ni Eyler tenglamasiga qo'ysak ayniyatga olib keladi.

**2-Teorema.** $y=y(x)$ funksiya $F_y-\frac{\partial}{\partial x}F_{y'}=0$ Eyler tenglamasining echimi bo'lsin. Agar $F(x,y,y')$ funksiya ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))\neq 0$$

bo'ladigan barcha $(x,y)$ nuqtalarda $y=y(x)$ funksiya uzluksiz ikkinchi tartibli xosilaga ega bo'ladi.

**Natija.** $y=y(x)$ ekstremal faqat $F_{y'y'}=0$ bo'lgan nuqtalardagina *sinishga* ega bo'lishi mumkin.

4-misolda $4F_{y'y'}=2y^2$ ifoda $OX$ o'qining nuqtalarida nolga aylanadi, shuning uchun ekstremal $x=0$ nuqtada *sinishga* ega bo'ladi.

**3-Teorema** (Bernshteyn). Bizga

$$y''=F(x,y,y') \qquad (6)$$

tenglama berilgan bo'lsin. Agar $F$, $F_y$, $F_{y'}$ funksiyalar har qanday chekli $y'$ lar uchun har bir chekli $(x,y)$ nuqtada uzluksiz va shunday $k>0$ o'zgarmas son mavjud bo'lsaki, tekisligining har bir chekli qismida chegaralangan $\alpha=\alpha(x,y)\geq 0$, $\beta=\beta(x,y)\geq 0$, funksiyalar uchun

$$F_y(x,y,y')>k,$$

$$|F(x,y,y')|\leq \alpha y'^2+\beta$$

tengsizliklar bajarilsa, u holda (6) tenglamani, tekislikning har xil $(a\neq b)$ absissalarga ega bo'lgan ixtiyoriy ikkita $(a,A)$ va $(b,B)$ nuqtalaridan faqat va faqat bitta $y=\varphi(x)$ integral egri chiziq o'tadi.

**Misol 5.** Tekislikning har xil absissali ixtiyoriy ikkita nuqtasi orqali $\int e^{-2y^2}(y'^2-1)dx$ funksionalni bitta va faqat bitta ekstremali o'tishligi isbot qilinsin.

**Yechish.** Berilgan funksional uchun Eyler tenglamasi quyidagi ko'rinishga

$$y''=2y(1+y'^2),$$

ega bo'lib, 3 – teorema o'rinli. Haqiqatdan, bu holda

$$F(x,y,y')=2y(1+y'^2) \quad \text{va} \quad F_y=2(1+y'^2)\geq 2=k.$$

o'rinli. So'ngra,

$$|F(x,y,y')| = |2y(1+y'^2)| \le 2|y|y'^2 + 2|y|,$$

shuning uchun $\alpha = \beta = 2|y| \ge 0$ bo'ladi.

**Misol 6.** Tekislikning har xil absissali ikkita nuqtasining hammasidan ham $J[y] = \int (y^2 + \sqrt{1+y'^2})dx$ funksionalning ekstremalini o'tkazib bo'lmasligi ko'rsatilsin.

**Yechish.** Eyler tenglamasi

$$y'' = 2y(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} \tag{7}$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bunga 3- teoremani tadbiq qilib bo'lmaydi, chunki (7) shart bajarilmaydi ( $F(x, y, y')$ funksiya $y''$ ga nisbatan $y'$ bo'yicha tezroq o'sadi ). Lekin bundan har xil absissali ikkita nuqtaning hammasidan ham ekstremali o'tkazib bo'lmasligi kelib chiqmaydi. (7) tenglamada $y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}$ deb olib,

$$p\frac{dp}{dy} = 2y(1+p^2)^{3/2}$$

yoki

$$p\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 2ydy$$

ga ega bo'lamiz . Bu tenglamani integrallab,

$-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = y^2 - C$ yoki $(C - y^2)\sqrt{1+y'^2} = 1$ quyidagi ifodani topamiz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-(y^2-C)^2}}{y^2 - C}, \tag{8}$$

bu yerda C-haqiqiy o'zgarmas. Bu ifodani $y$ ni masalan, $0 \le y \le b$, bu erda $b > \sqrt{2}$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymati uchun (8) ni o'ng qismidagi C o'zgarmasning qiymatlari haqiqiy bo'lmasligini ko'rish qiyin emas.

**80.** Tekislikning ixtiyoriy ikkita nuqtasi orqali $\int\sqrt{1+y^2+y'^2}dx$ funksionalni bitta va faqat bitta ekstremali o'tishligi ko'rsatilsin.

**Misol 7.** Har qanday

$$y''(x) = f(x,y,y') \tag{9}$$

tenglama

$$J[y(x)] = \int F(x,y,y')dx$$

funksional uchun Eyler tenglamasi bo'lishligini ko'rsating.

1). $F(x,y,y')$ funksiya $f(x,y,y')$ funksiya orqali qanday aniqlanadi? ekstremallari $y(x) = C_1x + C_2$ to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lgan barcha funksionallar topilsin.

**Yechish.** Eyler tenglamasi

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

(9) tenglama bilan ustma ust tushuvchi funksionalni qidiramiz. Bu esa $x, y, y'$ lar bo'yicha ayniyatga ega bo'lish kerakligini bildiradi

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y}y' - F_{y'y'}f(x, y, y') = 0.$$

Bu ayniyatni $y'$ bo'yicha differensiallab

$$F_{yy'x} + F_{y'y'y}y' + F_{y'y'y'}f + F_{y'y'}f_{y'} = 0$$

ifodaga ega bo'lamiz. $u = F_{y'y'}$ qeb olib, u funksiyaga nisbatan xususiy hosilali tenglamaga

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y'\frac{\partial u}{\partial y} + f\frac{\partial u}{\partial y'} + f_{y'}u = 0 \qquad (10)$$

ega bo'lamiz. Shunday qilib, funsionalni qidirish, ya'ni $F(x, y, y')$ funksiyani qidirish, (10) xususiy hosilali tenglamani integrallashga keltiriladi. Endi ikkinchi masalani qaraymiz. Bu holda Eyler tenglamasi $y''(x) = 0$ ko'rinishga ega va u funksiya uchun (10) ga asosan

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y'\frac{\partial u}{\partial y'} = 0 \qquad (11)$$

tenglamani olamiz. Bu tenglamani integrallaymiz. Xarakteristik tenglamasi

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{0}$$

ko'rishga ega bo'ladi. Bu tizimni integrallab, $y' = c_1$, $y = c_1x + c_2$ ifodani topamiz. Bu yerdan $c_2 = y - xy'$ ni topamiz. Shuning uchun, (11) tenglamaning xususiy yechimi

$$u(x, y, y') = \Phi(y', y - xy')$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $\Phi(y', y - xy')$ - o'z argumentlari bo'yicha ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiya. Bu yerdan

$$F(x, y, z) = \alpha(x, y) + z\beta(x, y) + \int_0^z (z - t)\Phi(t, y - tx)dt$$

bo'ladi, bu yerda $\alpha(x, y)$ va $\beta(x, y)$ lar $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}$ munosabatni qanoatlantruvchi o'zining argumentlari bo'yicha ixtiyoriy funksiyalar. Yechimdan ko'rinib turibdiki, (9) tenglama Eyler tenglamasi bo'ladigan variatsion masalalar to'plami mavjud.

***Eyler tenglamasining integrallanuvchi bo'lishining ayrim sodda hollari.***

**$1^0$.** $F$ $y'$ ga bog'liq emas, ya'ni $F = F(x, y)$. Bu holda Eyler tenglamasi

$$F_y(x, y) = 0 \qquad (12)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglamaning echimi ixtiyoriy o'zgarmasni ichiga olmaydi, umuman olganda (1) chegaraviy shartni qanoatlantirmaydi. Kamdan kam hollarda ekstremumga erishtiruvchi, (12) ning $(a, A)$, $(b, B)$ chegaraviy nuqtalardan o'tuvchi egri chizig' mavjud bo'ladi.

**Misol 8.** $J[y(x)]=\int_0^{\pi/2} y(2x-y)dx$ funksionalni $y(0)=0,\ y(\pi/2)=\pi/2$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremali topilsin.

**Yechish.** *Eyler tenglamasi* $y=x$ *ko'rinishga ega bo'ladi, chegaraviy* shartlarni qanoatlantirgani uchun $\int_0^{\pi/2} y(2x-y)dx$ integral ekstremumga erishishi mumkin. Boshqa chegaraviy shartlarda, masalan, $y(0)=0,\ y(\pi/2)=1$ da $y=x$ ekstremal $(0,0),\ (\pi/2,1)$ chegaraviy nuqtalardan o'tmaydi. Demak, ushbu chegaraviy shartlarda variatsion masala echimga ega emas.

**2⁰.** $F$ $y'$ ga nisbatan chiziqli bog'liq, ya'ni $F(x,y,y')=M(x,y)+N(x,y)y'$.

Bu holda Eyler tenglamasi

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0 \tag{13}$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu tenglama ham $1^0$ ga o'hshash differensial tenglama emas. (13) tenglama bilan aniqlanadigan egri chiziq ham chegaraviy shartlarni qanoatlantirmaydi va demak, uzluksiz funksiyalar sinfida variatsion masala echimga ega bo'lmaydi. Agar $XOY$ tekislikning biror $D$ sohasida $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$ bo'lsa, u holda $F(x,y,y')=M(x,y)+N(x,y)y'$ ifoda to'la differensial bo'ladi va

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')dx=\int_{(a,A)}^{(b,B)}(Mdx+Ndy)$$

funksional integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi, funksionalning qiymati esa joiz egri chiziqda o'zgarmaydi.

**Misol 9.** $J[y(x)]=\int_a^b (y^2+2xyy')dx,\quad y(a)=A,\quad y(b)=B,$ funksionalni ekstremumga tekshirilsin.

**Yechish.** Bu erda $F$ $y'$ ga chiziqli bog'liq, shuning uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=2y \quad \text{va} \quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\equiv 0,$$

Demak, integral ostidagi $(y^2+2xyy')dx$ ifoda to'la differensial. Bundan

$$J[y(x)]=\int_a^b (y^2dx+2xyy'dy)=\int_{(a,A)}^{(b,B)} d(xy^2)=xy^2\Big|_{x=a}^{x=b}=bB^2-aA^2,$$

integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi. Demak, $(a,A)$ va $(b,B)$ nuqtalardan o'tuvchi egri chiziq $y(x)$ qanday bo'lishidan qat'iy nazar biz uni integrallaganimiz yo'q. Variatsion hisob masalasi ma'noga ega emas.

**3⁰.** $F$ faqat $y'$ ga bog'liq, ya'ni $F=F(y')$.

Bu holda Eyler tenglamasi

$$F_{y'y'}\,y''=0.$$

Bu holda ekstremallar $y=c_1x+c_2$ ko'rinishidagi barcha mumkin bo'lgan tog'ri chiziqlar bo'ladi, $c_1, c_2$ - lar ixtiyoriy o'zgarmaslar.

**Misol 10.** $J=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+y'^2(x)}dx$, $y(a)=A$, $y(b)=B$ funksionalning ekstremumi topilsin. Bu funksional $(a,A)$ va $(b,B)$ nuqtalarni tutashtiruvchi yoy uzunligini aniqlaydi. Bu geometrik masala berilgan nuqtalarni tutashtiruvchi eng qisqa chiziqni topish masalasiga keltiriladi.

**Yechish.** Eyler tenglamasi $y''=0$ bo'lib, uning umumiy echimi $y=c_1x+c_2$ bo'ladi. $y(a)=A$, $y(b)=B$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi to'g'ri chiziq, albatta, $(a,A)$ va $(b,B)$ nuqtalardan o'tuvchi

$$y=\frac{B-A}{b-a}(x-a)+A$$

chiziq bo'ladi.

**4⁰.** $F$ $y$ ga bog'liq emas, ya'ni $F=F(x,y')$. **Bu holda Eyler** tenglamasi

$\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0$, bundan

$$F_{y'}(x,y')=c_1, \tag{14}$$

$c_1$ - lar ixtiyoriy o'zgarmas. (14) birinchi tartibli differensial tenglamani ifodalaydi, uni integrallab, masalaning ekstremallarini topamiz.

**Misol 11.** $A(1,3)$ va $B(2,5)$ nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqlar ichidan shunday egri chiziqni topingki, natijada $J[y(x)]=\int_1^2 y'(x)(1+x^2y'(x))dx$ funksional ekstremumga erishsin.

**Yechish.** $F$ $y$ ga bog'liq emas, shuning uchun Eyler tenglamasi $\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0$ yoki $\frac{d}{dx}(1+2x^2y')=0$, ko'rinishda bo'ladi, bundan $1+2x^2y'=c_1$.

U holda $y'=\frac{c_1-1}{2x^2}$, shuning uchun $y(x)=\frac{c_1^*}{x}+c_2$, bu erda $c_1^*=\frac{1-c_1}{2}$. Shunday qilib, giperbolalar oilasi ekstremal bo'ladi. Endi berilgan nuqtalardan o'tuvchi ekstremalni ajratib olamiz. $c_1^*$, $c_2$ o'zgarmaslarni topish uchun quyidagi tizimni tuzamiz:

$$\left.\begin{aligned} C_1^*+C_2&=3,\\ C_1^*/2+C_2&=5.\end{aligned}\right\}$$

Bundan $c_1^*=-4$, $c_2=7$. Izlanayotgan ekstremal $y(x)=7-\frac{4}{x}$ bo'ladi.

**5⁰.** $F$ $x$ ga oshkor holda bog'liq emas, ya'ni $F=F(y,y')$. Bu holda, Eyler tenglamasi

$$F_y-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0.$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini $y'$ ga ko'paytirib, quyidagi tenglamaga

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0$$

kelamiz. Bundan

$$F - y'F_{y'} = C_1, \qquad (15)$$

ga ega bo'lamiz, $C_1$ - lar ixtiyoriy o'zgarmas. Bu tenglamani $y'$ ga nisbatan echib, o'zgaruvchilarni ajratish orqali, yoki parametr kiritish yo'li bilan integrallash mumkin.

**Misol 12.** $J[y(x)] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{y}dx$ funksionalning yuqori yarim tekislikda yotuvchi $(a, A)$ va $(b, B)$ nuqtalar orqali o'tuvchi ekstremali topilsin.

**Yechish.** Integral ostidagi funksiya $x$ ga oshkor holda bog'liq bo'lmaganligi uchun Eyler tenglamasi (15) ga asosan

$$\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{y} - y'\frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2(x)}} = C_1.$$

Soddalashtirilgandan so'ng $y\sqrt{1+y'^2(x)} = C_1'$ ga ega bo'lamiz, bu erda $C_1' = \frac{1}{C_1}$.

Oxirgi tenglamani integrallab, $(x+C_2)^2 + y^2 = C_1'^2$ markazi $OX$ o'qida bo'lgan aylanalar oilasini olamiz. Bu erda berilgan nuqtalardan o'tuvchi egri chiziqgina ekstremal bo'la oladi. Qo'yilgan masala yagona echimga ega, chunki yuqori yarim tekislikda yotuvchi ikkita nuqtadan, markazi $OX$ o'qida bo'lgan bitta va faqat bitta yarim aylana o'tadi.

Quyidagi funksiyonallarning ekstremallari topilsin:

**81.** $J[y(x)] = \int_a^b [2xy + (x^2 + e^y)y']dx$, $y(a) = A$, $y(b) = B$.

**82.** $J[y(x)] = \int_0^1 (e^y + xy')dx$; $y(0) = 1$, $y(1) = a$.

**83.** $J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2 - y^2)dx$; $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**84.** $J[y(x)] = \int_0^{\pi} (y'^2 - y^2)dx$; $y(0) = 1, y(\pi) = -1$.

**85.** $J[y(x)] = \int_0^1 (x + y'^2)dx$; $y(0) = 1, y(1) = 2$.

**86.** $J[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + y'^2)dx$, $y(0) = 0, y(1) = 1$.

87. $J[y(x)]=\int\limits_0^1(y'^2+4y^2)dx;\quad y(0)=e^2,\,y(1)=1.$

88. $J[y(x)]=\int\limits_0^1(2e^y-y^2)dx;\quad y(0)=1,\,y(1)=e.$

89. $J[y(x)]=\int\limits_a^b(xy'+y'^2)dx.$

90. $J[y(x)]=\int\limits_a^b(y+\frac{y'^3}{3})dx.$

91. $J[y(x)]=\int\limits_a^b[p(x)y'+q(x)y+r(x)]dx,$ chiziqli funksional ektremumga ega bo'lmasligi ko'rsatilsin, bu erda $p(x)\in C_1[a,b], q(x)\in C[a,b], r(x)\in C[a,b]$.

92. $J[y(x)]=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx$ funksionalli va $y(a)=A,\quad y(b)=B$ chegaraviy shartlar berilgan bo'lsin. Agar integral ostidagi $F(x,y,y')dx$ ifodaga ixtiyoriy $u=u(x,y)$ funksiyaning to'la deferensialini qo'shsak, u holda Eyler tenglamas o'zgarmasdan (dastlabki holatda) qolishi ko'rsatilsin.

93. $J[y(x)]=\int\limits_a^b(y^2+y'^2+2ye^x)dx.$

94. $J[y(x)]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(y^2-y'^2-8ych x)dx, y(0)=2, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2ch\frac{\pi}{2}.$

95. $J[y(x)]=\int\limits_a^b x^n(y')^2dx$ funksionalning ekstremali topilsin va $n\geq 1$ bo'lganda, OY o'qiga nisbatan turli tomonlarda yotuvchi ikki nuqtani ekstremal orqali tutashtirish (bog'lash ) mumkin emasligi ko'rsatilsin.

***Parametrik ko'rinishdagi variatsion masalalar.*** Bir qator masalalarda chiziqni parametrik ko'rinishda

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t_0\leq t\leq t_1,$$

olish qulay va kezi kelganda zarurdir, bu erda $\varphi(t)$, $\psi(t)$ funksiyalar uzluksiz va bo'lakli uzluksiz hosilalarga ega, hamda $\dot\varphi^2(t)+\dot\psi^2(t)\neq 0$.

$$J_C=\int\limits_C F(t,x,y,\dot x,\dot y)dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}F(t,x,y,\dot x,\dot y)dt, \tag{16}$$

funksional berilgan bo'lsin, bunda $\dot x=\frac{dx}{dt}, \dot y=\frac{dy}{dt}$. (16) funksionalning qiymati chiziqqagina bog'liq bo'lishi uchun, integral ostidagi funksiya "t" parametrni o'z ichiga oshkor olmasligi va $\dot x,\dot y$ argumentlar bo'yicha musbat birinchi darajali bir jinsli bolishi zarur va yetarli

$$F(x,y,k\dot x,k\dot y)=kF(x,y,\dot x,\dot y),\quad k>0.$$

Masalan,

$$J_C = \int_C x dy - y dx$$

funksionalda integral ostidagi funksiya musbat birinchi darajali **bir jinsli.** Umuman olganda, bu erda

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = x\dot{y} - y\dot{x}$$

va $F(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = kF(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ ekanligi ravshan. Agar $\tilde{C}$ chiziq

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array}\right\}, \quad t_0 \le t \le t_1,$$

$J_C$ funksionalga berilgan $(x_0, y_0)$ va $(x_1, y_1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi **C chiziqlar** sinfida ekstremum bersa, u holda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar quyidagi **Eyler** tenglamalar tizimini qanoatlantiradi

$$\left.\begin{array}{l} F_x - \dfrac{d}{dt}(F_{\dot{x}}) = 0, \\ F_y - \dfrac{d}{dt}(F_{\dot{y}}) = 0, \end{array}\right\} \tag{17}$$

(17) **tenglamalar tizimining** biri boshqasining natijasi**dir. Eyler tenglam**asining Veyer**shtrass shakli quyidagicha:**

$$\frac{1}{r} = \frac{F_{x\dot{y}} - F_{y\dot{x}}}{F_1 \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

bu yerda $r$ – ekstremalning egrilik radiusi, $F_1$ esa

$$F_1 = \frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = \frac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2} = \frac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{-\dot{x}\dot{y}}$$

munasabatni umumiy qiymati.

**Misol 13.**

$$J_C = \int_{(0,0)}^{(x_1, y_1)} y^2 y'^2 dx$$

funksionalning ekstremali topilsin.

**Yechish.** $Oy$ o'qiga parallel to'g'ri chiziqlarni bittadan ortiq nuqtada kesishuvchi ekstremallar bo'lgani uchun qaralayotgan masalani parametrik shakliga o'tamiz. x=x(t), y=y(t) deb hisoblab, integral ostidagi funksiya $y^2 \cdot \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2} \cdot \dot{x}$ ko'rinishni olishini va $\dot{x}$ va $\dot{y}$ larga nisbatan musbat birinchi darajali bir jinsli bo'lishini topamiz. (26) tenglamalar tizimining birinchi tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\frac{d}{dt}\left(y^2 \frac{\dot{y}^1}{\dot{x}}\right) = 0,$$

bundan esa

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C_1^2,$$

kelib chiqadi. Oxirgi ifodani integrallab, quyidagi ifodani hosil qilamiz

$$y^2 = 2C_1x + C_2.$$

Ekstremalning koordinata boshidan o'tish shartidan $C_2=0$ ekanligini hosil qilamiz. Ikkinchi chegaraviy shart

$$C_1 = \frac{y_1^2}{2x_1}$$

ekanligini ko'rsatadi. Natijada,

$$y^2 = \frac{y_1^2}{x_1}x$$

ekanligini hosil qilamiz.

**Misol 14.**

$$J_C = \int_{t_0}^{t_1}[\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + a^2(x\dot{y} - y\dot{x})]dt$$

funksionalning ekstremali topilsin.

**Yechish.**

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + a^2(x\dot{y} - y\dot{x})$$

deb olib, shuni ko'rishimiz mumkinki F $\dot{x}$ va $\dot{y}$ larga nisbatan musbat birinchi darajali bir jinsli funksiya. Eyler tenglamasining Veyershtrass ko'rinishidan foydalanib,

$$F_{x\dot{y}} = a^2, F_{y\dot{x}} = -a^2; F_1 = \frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

ga ega bo'lamiz. Shuning uchun bu holda (27) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\frac{1}{r} = 2a^2.$$

Shunday qilib, ekstremalning $\frac{1}{r}$ egriligi o'zgarmas. Bundan kelib chiqadiki, ekstremal, bu aylana yoyi, xususan, to'la aylana bo'ladi, agar

$$\left.\begin{aligned} x(t_0) &= x(t_1), \\ y(t_0) &= y(t_1), \end{aligned}\right\}$$

bo'lsa.

**Quyidagi funksionallarning ekstremali topilsin:**

**96.** $J_C = \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} \frac{\dot{y}^2 - y^2\dot{x}}{\dot{x}}dt.$

97. $J_C = \int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} \frac{y'^2 - 3e^{y/x} x'^2}{x'} dt$

98. $J_C = \int\limits_{(-1,0)}^{(1,0)} (K \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} - x' y) dt, \quad K > 0 - const.$

## 5 §.Variatsion hisob sodda masalasining umumlashmalari

**$1^0$. *Yuqori tartibli hosilalarga bog'liq bo'lgan funksionallar.*** Bizga quyidagi funksional berilgan bo'lsin

$$J[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) dx \qquad (1)$$

bu yerda, $F$ – barcha argumentlari bo'yicha $n+2$ marta differensiallanuvchi funksiya, $y(x) \in C_n[x_0, x_1]$, chegaraviy shartlar esa quyidagi ko'rinishga ega:

$$\left. \begin{aligned} y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \\ y(x_1) = y_1, y(x_1) = y'_1, ..., y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}, \end{aligned} \right\} \qquad (2)$$

$(1)$ funksionalning $(2)$ shartlardagi ekstremallari quyidagi

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - .... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$$

Eyler-Puasson tenglamasining integral egri chiziqlari bo'ladi.

**Misol 1.**

$$J[y(x)] = \int\limits_0^1 (360x^2 y - y''^2) dx, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1, y(1) = 0, \; y'(1) = 2{,}5.$$

funksionalning ekstremali topiisin.

**Yechish.** Eyler-Puasson tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$360x^2 + \frac{d^2}{dx^2}(-2y'') = 0 \qquad \text{yoki} \qquad y^{(IV)}(x) = 180x^2;$$

uning umumiy yechimi –

$$y(x) = \frac{1}{2}x^6 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4.$$

Chegaraviy shartlardan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz

$$c_1 = \frac{3}{2}, \; c_2 = -3, \; c_3 = 1, \; c_4 = 0.$$

Qidiralayotgan ekstremal quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$y(x) = \frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 + x.$$

Endi, chegarada $(2)$ chegaraviy shartlarning hammasi ham berilmagan, aynan ularning sonidan chegaraviy shartlar kam bo'lgan holni, ya'ni Eyler tenglamasining umumiy yechimida chegaraviy shartlardan foydalangandan so'ng ham ozod o'zgarmaslar qolgan holdagi masalani ko'raylik. Bu kabi masalalarni yechishda (1) funksionalning variatsiyasini topish kerak, uni berilgan chegaraviy shartlarni inobatga olib almashtirish zarur hamda olingan variatsiyani nolga tenglashtirib, chegarada yangi shartlarni hosil qilish lozim.

**Misol 2.** $$y(a) = y(b) = 0 \tag{3}$$
shartlar ostida quyidagi

$$J[y(x)] = \frac{1}{2}\int_a^b (y'')^2 dx, \tag{4}$$

funksionalni ekstremal qiymatini amalga oshiruvchi $y = y(x)$ egri chizig' topilsin.

**Yechish.** Eyler-Puasson tenglamasini quyidagi ko'rinishiga ega bo'ladi

$$y^{(IV)}(x) = 0.$$

Uning umumiy yechimi

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 \tag{5}$$

to'rta ixtiyoriy $c_i$ $(i = 1,2,3,4)$ o'zgarmasga ega va ularni aniqlash uchun (3) chegaraviy shartlar yetarli emas. Shuning uchun, yuqorida aytilgan mulohazaga asosan (4) funksionalning variatsiyasini topamiz. Quyidagini hosil qilamiz

$$\delta J[y] = \int_a^b y''(y'')dx \tag{6}$$

(6) ni ikki marta bo'laklab integrallasak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\delta J[y] = y''(x)\delta y'(x)\Big|_a^b - \int_a^b y'''(x)\delta y'(x)dx =$$

$$= y''(x)\delta y'(x)\Big|_a^b - y'''(x)\delta y(x)\Big|_a^b + \int_a^b y^{(IV)}(x)\delta y(x)dx. \tag{7}$$

(7) ifoda (4) funksionalning $y(x)$ ekstremalida nolga aylanishi kerak. $\delta y(x)$ funksiyaning ixtiyoriyligidan $y^{(IV)}(x) = 0$ kelib chiqadi, ya'ni bu (3) funksional uchun Eyler-Puasson tenglamasi bo'ladi. Lekin, agar (7) ning o'ng tarafidagi integral nolga aylansa, unda *chegaraviy ifoda*

$$\left[y''(x)\delta y'(b) - y'''(x)\delta y(x)\right]\Big|_a^b$$

ham aynan nolga aylanishi kerak. $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ (chetlari maxkamlangan) ekanligidan

$$y''(b)\delta y'(b) - y''(a)\delta y'(a) = 0.$$

bo'lishi kerak. $\delta y'(b)$ va $\delta y'(a)$ miqdorlarning ixtiyorligidan

$$y''(a) = 0, \quad y''(b) = 0. \tag{8}$$

bo'lishi zarurligiga ega bo'lamiz. (8) shart bilan (3) shart (5) egri chizig'lar oilasidan $y(x)\equiv 0$ ekstremalni bir qiymatli ajratadi.

**$2^0$. *m ta funksiyaga bog'liq bo'lgan funksionallar.*** $m$ ta $y_1(x),\dots,y_m(x)$ funksiyalarga bog'liq bo'lgan

$$J[y_1,y_2,\dots,y_m]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\dots,y_m,y_1',y_2',\dots,y_m')dx$$

funksionalning quyidagi ko'rinishdagi

$$y_k(x_0)=y_k^0,\ y_k(x_1)=y_k^{(I)}\qquad (k=1,2,\dots,m),$$

chegaraviy shartlar ostidagi ekstremallarini ushbu Eyler tenglamalar sistemasi deb ataluvchi ikkinchi tartibli differensial tenglamalar tizimidan topiladi

$$F_{y_k}-\frac{d}{dx}F_{y_k'}=0\qquad (k=1,2,\dots,m),\tag{9}$$

**Misol 3.** Chegaraviy shartlardan foydalanib quyidagi

$$J[y(x),z(x)]=\int_1^2\left(y'^2+z^2+z'^2\right)dx$$

$$y(1)=1,\ y(2)=2;\ z(1)=0,\ z(2)=1.$$

funksionalning ekstremali topilsin.

**Yechish.** Bu funksional uchun (9) tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega

$$\left.\begin{aligned}y''&=0,\\ z-z''&=0.\end{aligned}\right\}$$

ni yechib, quyidagilarni topamiz

$$y=c_1x+c_2,\ z=c_3e^x+c_4e^{-x}.$$

Chegaraviy shartlarga asosan, quyidagiga ega bo'lamiz

$$c_1=1,\ c_2=0,\ c_3=\frac{1}{e^2-1},\ c_4=-\frac{e^2}{e^2-1},$$

bundan, qidirilayotgan ekstremal

$$\left.\begin{aligned}y&=x,\\ z&=\frac{sh(x-1)}{sh1}\end{aligned}\right\}$$

ekanligi kelib chiqadi. Bular ikkita silindrik sirtlarni kesishishidan hosil bo'lgan fazoviy egri chiziqlardir.

**Misol 4.** Chegaraviy shartlardan foydalanib,

$$J[y(x),z(x)]=\int_0^{\pi}\left(2yz-2y^2+y'^2-z'^2\right)dx,$$

$$y(0)=0,\ y(\pi)=1,\ z(0)=0,\ z(\pi)=-1.$$

funksionalning ekstremali topilsin.

**Yechish.** (9) tenglamalar tizimi quyidagi ko'rinishga ega

$$\left.\begin{aligned} y''+2y-z=0,\\ z''+y=0,\end{aligned}\right\}$$

bundan $z$ funksiyani chiqarib tashlab, quyidaga ega bo'lamiz.

$$y^{(IV)}+2y''+y=0.$$

Bu tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishga ega

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x(c_3\cos x+c_4\sin x).$$

$y(0)=0,\ y(\pi)=1$ chegaraviy shartlardan foydalanib, quyidagilarni hosil qilamiz $c_1=0, c_3=-\dfrac{1}{\pi}$, va demak, $y(x)=c_2\sin x+c_4x\sin x-\dfrac{x}{\pi}\cos x$ ni olamiz. $z=y''+2y$ shartdan foydalanib, $z$ funksiyani topamiz. Undan

$$z=c_2\sin x+c_4(2\cos x+x\sin x)+\frac{1}{\pi}(2\sin x-x\cos x).\ \text{ni topamiz.}$$

O'zgarmas $c_2$ va $c_4$ larni $z(0)=0, z(\pi)=-1$ chegaraviy shartlar orqali topamiz, $c_4=0, c_2-$ ixtiyoriy bo'ladi. U holda

$$z=c_2\sin x+\frac{1}{\pi}(2\sin x-x\cos x).$$

Ekstremallar oilasi,

$$\left.\begin{aligned} y=c_2\sin x-\frac{x}{\pi}\cos x,\\ z=c_2\sin x+\frac{1}{\pi}(2\sin x-x\cos x),\end{aligned}\right\}$$

bo'lib, bu yerda $c_2-$ ixtiyoriy o'zgarmas.

**$3^0$. *Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarga bog'liq bo'lgan funksionallar.*** Quyidagi ko'rinishdagi funksionalni qaraymiz

$$J[z(x,y)]=\iint_D F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (10)$$

bu yerda $F-$ o'z argumentlari bo'yicha uch marta differensiallanuvchi funksiya, faraz qilaylik, $D$ soxada o'zining ikkinchi tartibgacha hosilalari bilan uzluksiz, $D$ soxaning $\Gamma$ chegarasida berilgan qiymatni qabul qiluvchi va (10) funksionalga ekstremum beruvchi $z=z(x,y)$ funksiya izlanayotgan bo'lsin. Bu funksiya: agar $z=z(x,y)$ sirtda (10) funksional ekstremumga ega bo'lsa, u holda $z=z(x,y)$ funksiya Eyler-Ostrogratskiy tenglamasini qanoatlantiradi

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}-\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}=0, \tag{11}$$

bu yerda $\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}$ va $\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}$ – $x$ va $y$ lar bo'yicha to'liq xususiy hosilalar:

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}=F_{px}+F_{pz}\frac{\partial z}{\partial x}+F_{pp}\frac{\partial p}{\partial x}+F_{pq}\frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}=F_{qy}+F_{qz}\frac{\partial z}{\partial y}+F_{qp}\frac{\partial p}{\partial y}+F_{qq}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Bu yerda qisqalik uchun $\frac{\partial z}{\partial x}=p,\ \frac{\partial z}{\partial y}=q$ belgilash kiritildi. (11) tenglama (10) funksionalni ekstremumining zaruriy sharti hisoblanadi. U $\Gamma$ chegarada berilgan qiymatlarni qabul qiluvchi $z=z(x,y)$ yechimi qidirilayotgan ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamani ifodalaydi.

**Misol 5.** Ushbu funksional uchun

$$J[z(x,y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

Eyler-Ostrogratskiy tenglamasi yozilsin.

**Yechish.** Biz $F(x,y,z,p,q)=p^2-q^2$ ga egamiz. U holda (11) ga binoan,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

ega bo'lamiz.

$$J[z(x_1,x_2,...,x_n)]=\iint_D\cdots\int F(x_1,x_2,...,x_n,z,p_1,p_2,...,p_n)dx_1,dx_2,...,dx_n,$$

funksional uchun, bu yerda $p_k=\frac{\partial z}{\partial x_k}\ (k=1,2,...,n)$, ekstremumning zaruriy sharti quyidagi Eyler- Ostrogratskiy tenglamasi orqali ifodalanadi

$$F_z-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\{F_{p_i}\}=0$$

yoki uni yoyilmasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F_z-\sum_{i=1}^{n}\left(F_{x_ip_i}+F_{zp_i}\cdot p_i+\sum_{i=1}^{n}F_{p_ip_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_i}\right)=0.$$

Ushbu tenglamaning yechimi $n$-o'lchovli $D$ soxaning $\Gamma$ chegarasida berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyadan iborat bo'ladi.

**Misol 6.** $Q$ sohasining $\Gamma$ chegarasida berilgan qiymatlarni qabul qilib,

$$D(z) = \iint_D \ldots \int \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n .$$

Dirixle integraliga minimum beruvchi $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyaga shart topilsin.

**Yechish.** Bu holda $F = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2$ yani $F$, $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ larga aynan bog'liq emas. Bundan,

$$F_z = F_{zp_i} = F_{x_i p_i} = 0, \qquad F_{p_i p_j} = \begin{cases} 2, & agar \quad i = j, \\ 0, & agar \quad i \neq j, \end{cases}$$

(19) formulaga asosan $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = 0$ yoki $\Delta z = 0$ ni olamiz (n- tartibli Laplas tenglamasi).

**Izoh:** Agar integral belgisi ostiga $z = z(x, y)$ funksiyaning n-tartibli hosilalari kirsa u holda Eyler-Ostragradskiy tenglamasi quyidagi

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_{z_x}\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_{z_y}\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{F_{z_{xx}}\} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\{F_{z_{xy}}\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{F_{z_{yy}}\} - \ldots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n}\{F_{z_{\underbrace{y \ldots y}_{n}}}\} = 0,$$

(12)

ko'rinishga ega bo'ladi.

**Misol 7.** $J[z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - 2zf(x,y)\right] dx dy$

funksional uchun Eyler-Ostragodskiy tenglamasi tuzilsin.

**Yechish.** Biz quyidagiga egamiz

$$F = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - 2zf(x,y)$$

**(12)** ga asosan, quyidagini topamiz

$$-2f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0,$$

yoki

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = f(x,y)$$

oxirgi tenglama qisqacha

$$\Delta\Delta z = f(x,y)$$

ko'rinishni oladi.

Quyidagi funksionallarning ekstremali topilsin:

99. $J[y(x)]=\int_0^1(y^2+2y'^2+y''^2)dx,\ y(0)=0, y(1)=0,\ y'(0)=1, y'(1)=-sh1.$

100. $J[y(x)]=\int_{-1}^0(240y-y'''^2)dx,\ y(-1)=1, y(0)=0,\ y'(-1)=-4{,}5, y'(0)=0,\ y''(-1)=16,$
$y''(0)=0.$

101. $J[y(x)]=\int_a^b(y+y'')dx,\ y(a)=y_0,\ \ y(b)=y_1,\ y'(a)=y_0',\ \ \ y'(b)=y_1'.$

102. $J[y(x)]=\int_a^b(y'^2+yy'')dx, y(a)=A_1,\ y'(a)=A_2,\ y(b)=B_1,\ y'(b)=B_2.$

103. $J[y(x)]=\int_0^1(y'^2+y''^2)dx,\ \ \ y(0)=0, y(1)=sh1,\ y'(0)=1,\ y'(1)=ch1.$

Berilgan shartlar asosida quyidagi funksionalning ekstremali topilsin:

104. $J[y]=\frac{1}{2}\int_0^1(y'')^2dx,\ y(0)=0,\ y(1)=\frac{1}{2},\ y'(0)=0,\ y'(1)=1.$

105. $J[y(x),z(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2z-4y^2+y'^2-z'^2)dx,\ y(0)=z(0)=0,\ \ y(\frac{\pi}{4})=z(\frac{\pi}{4})=1.$

106. $J[J[y(x),z(x)]=]=\int_{-1}^1(2xy-y'^3+\frac{z'^3}{3})dx,\ y(1)=0, y(-1)=2, z(1)=1, z(-1)=-1.$

107. $J[y(x),z(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+z'^2-2yz)dx,\ y(0)=z(0)=0,\ y(\frac{\pi}{2})=z(\frac{\pi}{2})=1.$

108. $J[y(x),z(x)]=\int_0^1(y'^2+z'^2+2y)dx,\ \ y(0)=1,\ \ z(0)=0,\ y(1)=\frac{3}{2}, z(1)=1.$

109. $J[z(x,z)]=\int_a^b F(x,y,y',z,z')dx$ funksional uchun Eyler tenglamasini quyidagi birinchi integrallarni berishi ko'rsatilsin:
1) $\frac{\partial F}{\partial y'}=C,$ agar $F$ $y$ ni o'z ichiga olmasa, 2) $F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\frac{\partial F}{\partial z'}=C,$ agar $F$ $x$ ni o'z ichiga olmasa.

Quyidagi funksionallar uchun Eyler-Ostragradskiy tenglamasi yozilsin.

110. $J[z(x,y)]=\iint_D[(\frac{\partial z}{\partial x})^4+(\frac{\partial z}{\partial y})^4+12zf(x,y)]dxdy.$

111. $J[z(x,y)]=\iint_D(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})^2dxdy.$

112.

$$J[z(x_1,x_2,\dots,x_n)] = \iint_D \cdots \int \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\dots,x_n)\Big(\frac{\partial z}{\partial x_i}\Big)^2 - c(x_1,\dots,x_n)z^2 + 2zf(x_1,\dots,x_n)\Big]dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

**113.** Minimal sirtlarning differensial tenglamasi keltirib chiqarilsin.

**114.** $z(x,0)=0$, $z(x,1)=1$ shartlar ostida $J[z(x,y)] = \int_0^1\int_0^1 e^x y \sin z_y\, dx dy$ funksionalning ekstremali topilsin.

## 6 §. Eyler tenglamasining invariantligi

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

Agar $J[y]$ funksionalning erkle o'zgaruvchilarini o'zgartirilsa, yoki bir vaqtning o'zida noma'lum funksiyani va erkli o'zgaruvchilarni o'zgartirilsa u holda ekstremal avvalgidek integral ostidagi o'zgartirilgan ifoda uchun tuzilgan Eyler tenglamasidan topiladi. Bu Eyler tenglamasining invariantligini ifodalaydi.

Aytaylik, $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ bo'lgan $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ lar berilgan bo'lsin. U holda

$$\int_a^b F(x,y,y')dx = \int F\Big[x(u,v),\ y(u,v), \frac{y_u + y_v v'_u}{x_u + x_v v'_u}\Big](x_u + x_v v'_u)du = \int \Phi(u,v,v'_u)du$$

bo'ladi va dastlabki funksionalni ekstremali $\int \Phi(u,v,v'_u)du$ funksional uchun yozilgan

$$\Phi_v - \frac{d}{du}\Phi_{v'} = 0$$

Eyler tenglamasidan aniqlanadi.

**Musol 1.** $J[r] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$, $r = r(\varphi)$, funkcionalning ekstremali topilsin.

**Yechish.** Bu funksional uchun Eyler tenglamasi

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} - \frac{d}{d\varphi}\Big(\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\Big) = 0.$$

**O'zgaruvchilarni** $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, **qilib almashtirish**

$$\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

**ni beradi va biz quyidagi funksionalga kelamiz**

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Bu funkcional uchun Eyler tenglamasi $y''=0$ bo'ladi va uning umumiy yechimi

$$y=C_1x+C_2.$$

Demak, dastlabki funksionalning ekstremali $r\sin\varphi=C_1r\cos\varphi+C_2$, tenglama bilan beriladi, bu erda $C_1$ va $C_2$ - ixtiyoriy o'zgarmaslar.

**Musol 2.** $J[y]=\int\limits_0^{\ln 2}(e^{-x}y'^2-e^xy^2)dx$ funkcionakning ekstremali topilsin.

**Yechish.** Berilgan funkcional uchun Eyler tenglamasi quyidagi ko'rinishda

$$y''-y'+e^{2x}y=0$$

bo'ladi. O'zgaruvchilarini o'zgartiramiz

$$\left.\begin{array}{l} x=\ln u, \\ y=v, \end{array}\right\}$$

U holda dastlabki funkcional quyidagi ko'rinishga almashtiriladi

$$J[v]=\int\limits_1^2(e^{-\ln u}u^2v'^2-e^{\ln u}v^2)\frac{du}{u}=\int\limits_1^2(v'^2-v^2)du,$$

va bu uchun Eyler tenglamasi $v''+v=0$ ko'rinishda bo'ladi. Uning umumiy yechimi

$$v=C_1\cos u+C_2\sin u$$

bo'ladi. Dastlabki eski $x,y$ koordinatalarga o'tib quyidagi ko'rinishdagi ekstremallar

$$y=C_1\cos e^x+C_2\sin e^x.$$

tenglamasini olamiz.

**115.** $J=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}r\sin\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$ funksionalning ekstremali topilsin.

**116.** $J=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}f(r\sin\varphi)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$ funksionalning ekstremali doimo kvadraturalash orqali topilishi ko'rsatilsin.

**117.** $J=\int\limits_a^b\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ funkcionalning ekstremali topilsin.

Bir va ko'p o'zgaruvchili hol singari koordinatalarni almashtirishga nisbatan Eyler- Ostragratskiy tenglamasi ham invariant bo'ladi.

**Musol 3.**

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$$

Laplas tenglamasi qutb koordinatalar tizimida yozilsin.

**Yechish.**

$$D[z(x,y)]=\iint\limits_G(z_x{}^2+z_y{}^2)dxdy$$

funksionalni qaraymiz. Bu funksional uchun berilgan tenglama Eyler-Ostragratskiy tenglamasi bo'ladi. Endi $(x,y)$ Dekart koordinatalar tizimidan $(\rho,\varphi)$ qutb koordinatalar sistemasiga o'tamiz : buning uchun $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ deb olamiz. U holda

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\varphi,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{\rho},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

ga ega bo'lamiz. Bu erdan

$$D[z(x,y)]=\iint_G[(z_\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}+z_\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2+((z_\rho\frac{\partial\rho}{\partial y}+z_\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y})^2]\rho d\rho d\varphi=\iint_G(\rho\, z_\rho^{\ 2}+\frac{1}{\rho}z_\varphi^{\ 2})d\rho d\varphi\,.$$

Oxirgi integral uchun Eyler-Ostragratskiy tenglamasini tuzayotub, Laplas tenglamasining qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasiga

$$\frac{1}{\rho}z_{\varphi\varphi}+\rho\, z_{\rho\rho}+z_\rho=0$$

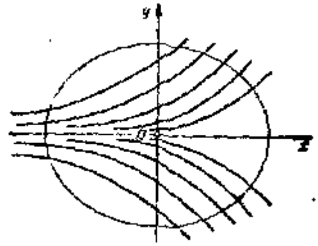
kelamiz.

## 7 §. Ekstremallar maydoni

$y=y(x,c)$ egri chiziqlar oilasi $XOY$ tekislikning berilgan $D$ sohasida xos maydonni hosil qiladi, agar shu sohaning har bir $(x,y)$ nuqtasidan $y=y(x,c)$ egri chiziqlar oilasining faqat va faqat bitta egri chizig'i o`tsa.

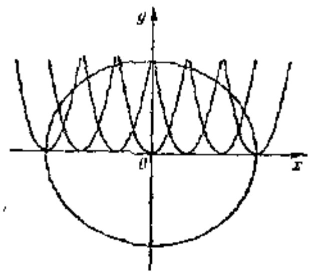
$y=y(x,c)$ egri chiziqlar oilasi egri chizig'ining $(x,y)$ nuqtadasiga o'tkazilgan urinmaning $\rho(x,y)$ burchak koeffitsienti, maydonning $(x,y)$ nuqtadagi *og`ishi,* deb ataladi. $y=y(x,c)$ egri chiziqlar oilasi $XOY$ tekislikning $D$ sohasida markaziy maydonni tashkil qiladi, agar $D$ sohaning tashqarisida yotuvchi $(x_0,y_0)$ nuqtalarning biridan chiquvchi o`z-o`zi bilan kesishmaydigan egri chiziqlar $D$ sohani butun qoplasa. $(x_0,y_0)$ nuqta egri chiziqlar dastasining markazi deyiladi.

**Misol 1.** $x^2+y^2\le 1$ aylana ichida $y=ce^x$ egri chiziqlar oilasi, bu yerda $c$-$const$, xususan $c=o$ da xos maydonni tashkil qiladi. Chunki bu egri chiziqlar hech qachon kesishmaydi, hamda aylananing har bir $(x,y)$ nuqtasi orqali faqat va faqat bitta shu oilaga tegishli egri chiziq o`tadi. Ixtiyoriy $(x,y)$ nuqtadagi maydonning og`ishi $\rho(x,y)=ce^x=y$ ga teng bo'ladi (4- rasm).



4- rasm

**Misol 2.** $y=(x+c)^2$ parabolalar oilasi $x^2+y^2\le 1$ aylana ichida xos maydon tashkil qilmaydi, chunki egri chiziqlar oilasiga mansub turli egri chiziqlar aylana ichida kesishadi va sohani butun qoplay olmaydi (5- rasm).



5- rasm

**Misol 3.** $y=cx$ egri chiziqlar oilasi $x>o$ sohada markaziy maydonni hosil qiladi.

Quyidagi egri chiziqlar oilalasi berilgan sohada (xos yoki markaziy) maydon hosil qiladimi?

**118.** $y=C\cdot tgx;\quad o\le x\le \frac{\pi}{4};\quad -\frac{\pi}{2}\le y\le \frac{\pi}{2}.$

**119.** $y=C\cdot\cos x;$ a) $|x|<\frac{\pi}{4};$ b) $\frac{\pi}{2}<x\le\pi;$ v) $|x|\le\pi$

**120.** $y=(x-C)^3;\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1.$

**121.** $y=C\cdot(x^2-2x);$ a) $o\le x<1;$ b) $-1\le x\le 3;$ v) $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}.$

**122.** $y=C\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right);$ a) $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2};$ b) $\frac{\pi}{3}\le x\le\pi;$ v) $\frac{\pi}{4}\le x\le 2\pi.$

**123.** $y=e^{x+c};\quad x^2+y^2\le 1.$

Agar maydon (xos yoki markaziy) biror variatsion masalaning *ekstremallar oilasi tomonidan hosil qilingan bo'lsa u holda, u ekstrimallar maydononi, deb ataladi.*

**Misol 4.** $J[y]=\int_0^1 y'^2 dx$ funksionalni ko`rib chiqamiz.

Uning ekstremallari $y=c_1x+c_2$ to`g`ri chiziqlar bo`ladi. $y=c_2$ *ekstremallar oilasi* xos *maydonini* tashkil qiladi, $y=c_1x$ *ekstremalar oilasi* esa markazi koordinatalar boshida bo`lgan markaziy maydonni tashkil qiladi.

**124.** $J[y]=\int_0^a (y'^2+y^2)dx, \quad a>o.$ funksional uchun xos va markaziy ekstremallar maydoni ko`rsatilsin.

**125.** $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2-y^2+x^2+4)dx.$ funksional uchun xos va markaziy *ekstremallar maydoni ko`rsatilsin.*

Aytaylik, $y=y(x)$ egri chiziq $J[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ funksionalning $A(x_0,y_0)$ va $B(x_1,y_1)$ nuqtalardan o`tuvchi ekstremali bo`lsin.

$y=y(x)$ ekstremal xos ekstrimallar maydoniga mansub deyiladi, agar y=y(x,C) topilgan ekstremallar oilasi biron $C=C_0$ qiymatda $y=y(x)$ ekstremalni o'z ichiga olsa, sababi, bu $y=y(x)$ ekstremal maydon tashkil *qilgan y=y(x,C) oila D sohasining chegarasida yotmaydi.*

Agar $y=y(x)$ ekstremal atrofida markazi $(x_0,y_0)$ nuqtada bo`lgan ekstremallar dastasi aynan shu nuqtadan o`tuvchi maydon tashkil qilsa, u holda $y=y(x)$ ekstremalni o'z ichiga oluvchi markaziy maydon topiladi, deyiladi. $y=y(x)$ oilaning parametri sifatida dastaning egri chizig'iga $(x_0,y_0)$ nuqtadan o'tkazilgan *urinmaning burchak koeffitsienti olinadi.*

**Misol 5.** $J[y]=\int_0^2 (y'^2+\sin^2 x)dx$ funksional uchun eng sodda variatsion masalani ko'rib chiqamiz.

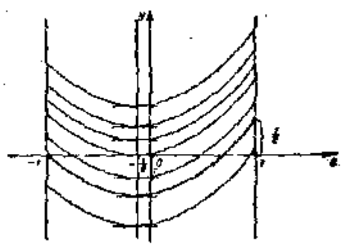
**Yechish.** a) Aytaylik, $y(0)=1$, $y(2)=1$ bo'lsin. Ushbu funksionalning *ekstremallar oilasi* $y=c_1x+c_2$ *tenglama orqali aniqlanadi.* $y=1$ *ekstremal* berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. Bu ekstremal $y=c_2$ xos ekstremallar maydoniga mansub bo'ladi, bu yerda $c_2$- ixtiyoriy o`zgarmas.

b) Aytaylik, $y(0)=0$, $y(2)=4$ bo'lsin. Ushbu chegaraviy shartlarga javob beruvchi ekstremal $y=2x$ to`g`ri chiziq hisoblanadi, u $y_1=c_1x$, ($c_1$-

ixtiyoriy o'zgarmas) markazi $O(0,0)$ nuqta bo'lgan markaziy ekstremallar maydoniga mansub bo'ladi.

Misol 6. $J[y]=\int_{-1}^{1} y'\cdot\left(2x-\frac{1}{2}y'\right)dx$, $y(-1)=0$, $y(1)=\frac{1}{2}$, sodda variatsion masalasini ko'raylik.

Eyler tenglamasining yechimi $y=x^2+c_1x+c_2$ ko'rinishda bo'ladi. Masalaning $y=x^2+\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$ ekstremalini $y=x^2+\frac{x}{4}+c_2$ xos ekstremallar maydoniga kiritish mumkin (6-rasm).



6- rasm

Quyidagi sodda variatsion masalalarning ekstremallarini (xos yoki markaziy) maydonlarga mansubligi ko'rsatilsin.

126. $J[y]=\int_0^1 (y'^2-2xy)dx;\ \ y(0)=y(1)=0$.

127. $J[y]=\int_0^1 (2e^x+y'^2)dx;\ \ y(0)=1,\ y(1)=e$.

128. $J[y]=\int_0^a (y^2-y'^2)dx;\ \ y(0)=0,\ y(a)=0, (a>0, a\neq k\pi)$

129. $J[y]=\int_0^2 (y'^2+x^2)dx;\ \ y(0)=1,\ \ y(2)=3$.

**Ta'rif**. Faraz qilaylik, bizga quyidagi $\Phi(x,y,c)=0$ egri **chiziqlar oilasi** berilgan bo'lsin. Ushu oilaning C- diskreminanti, deb tenglamalar tizimi

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0\\ \dfrac{\partial\Phi(x,y,c)}{\partial C}=0\end{cases}$$

orqali aniqlanadigan nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Umumiy holda C – diskreminant tarkibiga egri oila, tugun nuqtalarning geometrik o'rni ham kiradi. Agar bizga markazi $A(x_0,y_0)$ nuqtada bo'lgan egri chiziqlar dastasi berilgan bo'lsa, u holda bu egri chiziqlar dastasining markazi C- diskreminantda yotadi.

**Misol 7.** $y=(x-c)^2$ egri chiziqlar oilasining C - diskriminanti topilsin.

**Yechish.** Quyidagi tenglik

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0\\ \dfrac{\partial\Phi(x,y,c)}{\partial C}=0\end{cases}$$

bizning holimizda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\begin{cases}y-(x-c)^2=0\\ 2(x-c)=0\end{cases}$$

bundan $y=0$. Bu chiziq $y=0$ berilgan oilaning egrisi ekanligini ko'rish qiyin emas . Haqiqatda, ixtiyoriy $x=x_0$ nuqtada $y=0$ chiziq $y=(x-x_0)^2$ oilaga mos keluvchi egri chiziq bilan umumiy urunmaga ega bo'ladi. So'ngra $y=0$ chiziqning qanday qismini olmaylik, unga berilgan oilaning cheksiz egri chiziqlar to'plami urinadi. Bu xolda C -diskreminant birgina egrilikdan iborat bo'ladi.

Quyidagi misollarda berilgan oilalarning C – diskreminanti topilsin:

**130.** $y=cx+c^2$.

**131.** $y(c-x)-c^2=0$.

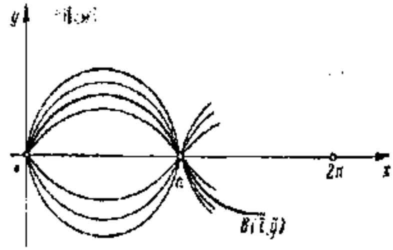
**132.** $(x-c)^2+y^2=1$.

Agar $y=y(x)$ egri chiziqning AB yoyi A nuqtadan farqli umumiy $A'$ nuqtaga, berilgan egri chiziqni o'z ichiga oluvchi markazi A nuqtaga bo'lgan $y=y(x,c)$ dastaing C – diskreminanti bilan ega bo'lsa, u holda $A'$ nuqta A nuqtaga qo'shma nuqta deyiladi.

**Misol 8.** $y=c\sin x$ bir parametrli oilani qaraylik, ushbu oilaning C– diskreminanti quyidagi tenglamalar bilan aniqlanadi

$$\begin{cases}y-c\sin x=0\\ -\sin x=0\end{cases},$$

yani o'zi bilan birga $(\pi k,0)$, $k=0,\pm1,\pm2$ (sinussoidaning $OX$ o'qi bilan kesishgan nuqtalari) diskret nuqtalar to'plamini ifoda qiladi. Misol uchun $c=2$ deb olsak, markazi $O(0,0)$ nuqtadagi sinussoidalar dastasiga tegishli bo'lgan $y=2\sin x$ egri chiziqqa ega bo'lamiz.




7-rasm

Agar $y=2\sin x$ egri chiziq yoyining boshqa $B$ oxiri $\bar{x}\in(\pi,2\pi)$ absissaga ega bo'lsa, u holda OB yoy $O(0,0)$ nuqtadan tashqari C - diskreminantga tegishli yana bitta nuqtaga ega bo'ladi va u $O^*(\pi,0)$ nuqta bo'lib, $O(0,0)$ nuqtaga qo'shma nuqta bo'ladi. Agar $0<x<\pi$, bo'lsa, u holda OB yoyda $O(0,0)$ nuqtaga qo'shma bo'lgan nuqta mavjud emas (7- rasm).

**133.** $y=c(x-1)x$ egri chiziqlar oilasi berilgan. $O(0,0)$ nuqtaga qo'shma nuqta topilsin.

**134.** $y=c\,shx$ egri chiziqlar oilasi berilgan. $O(0,0)$ nuqtaga qo'shma nuqta topilsin.

**1°. *Ekstremallarning markziy maydonga mansub bo'lishligining yetarli sharti (Yakobi).***

Ekstremalning AB yoyi markazi $A(x_0,y_0)$ nuqtada bo'lgan ekstremallar markaziy maydoniga mansub bo'lishi uchun A nuqtaga qo'shma nuqta bo'lgan $A^*$ nuqtaning AB yoyda yotmasligi yetarli.

**Misol 9.** Quydagi funksionalni ko'raylik

$$J[y(x)]=\int_0^a(y'^2-9y^2+e^{x^2})dx,\qquad y(0)=0\; y(a)=0,$$

$y=0$ ekstremalni markazi $O(0,0)$ nuqtada bo'lgan ekstremallarning markaziy maydoniga mansubligi tekshirilsin.

**Yechish.** Berilgan funksional uchin Eyler tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega $y''+9y=0$. Uning umumiy yechimi $y(x)=c_1\sin 2x-c_2\cos 3x$. Agar $a\neq\frac{k\pi}{3}$ bo'lsa, k - butun son, u holda chegaraviy shartlarni qanoatlantiriruvchi ekstremal $y=0$ bo'ladi. Agar ekstremalni bir parametrlik $y_1=c_1\sin 3x$ oilasini qarasak, u holda bu oilaning C- diskreminanti $(\frac{\pi k}{3};0)$, k - butun son, nuqtadan tashkil topganini ko'rish qiyin emas. Shuning uchun, agar $a<\frac{\pi}{3}$ bo'lsa, u holda $y=0$ ekstremalda $O(0,0)$ nuqtaga qo'shma nuqta mavjud bo'lmaydi, va unda ravshanki, $y=0$ ekstremalni markazi $O(0,0)$ nuqtada bo'lgan ekstremallarning markaziy maydoniga kiritish mumkin. Agar $a\geq\frac{\pi}{3}$ bo'lsa, u holda $y=0$ ekstremal kamida bitta $O(0,0)$ nuqtaga qo'shma bo'lgan nuqtani o'z ichiga oladi, va Yakobiyning yetarlilik sharti bajarilmaydi. Bu holda $y_1 = c_1 \sin 3x$ maydon tashkil qilmaydi.

Yakobi shartining analitik ko'rinishi. Bizga quyidagi oddiy variatsion

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

masala qo'yilgan bo'lsin.

Agar Yakobi tenglamasining

$$(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'})u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'}u') = 0$$

$u(x_0) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi $u = u(x)$, $x_0 < x < x_1$ intervalning biron bir nuqtasida nolga aylansa, u holda $A(x_0, y_0)$ nuqtada qo'shma bo'lgan A* nuqta ekstremalni AB yoyida yotadi (B nuqta $(x_1,y_1)$ koordinataga ega).

Agar Yakobi tenglamasining $u(x_0) = 0$ qanoatlantiruvchi yechimi $u = u(x)$ mavjud bo'lib, $x_0 < x \le x_1$ intervalning hech bir nuqtasida no'lga aylantirmasa, u holda AB yoyda A nuqtada bilan qo'shma bo'lgan nuqta mavjud emas. Ekstremalning AB yoyini markazi $A(x_0, y_0)$ nuqtada bo'lgan ekstremallarning markaziy maydoniga kiritish mumkin.

Yakobi tenglamasida $F_{yy}(x, y, y'), F_{yy'}(y, x, y')$ va $F_{y'y'}(x, y, y')$ funksiyalardagi y(x) ning o'rniga $y = y(x, C_0)$ ekstremallar tenglamasining o'ng tomonini qo'yish lozim.

**Misol 10.**

$$J[y(x)] = \int_0^a (y'^2 + x^2)dx$$

funksionalni $O(0,0)$ va B(a,3) nuqtalardan o'tuvchi ekstremali uchun Yakobi sharti bajariladimi?

**Yechish.** Biznig holimizda Yakobi tenglamasi quyidagi ko'rinishda u''=0 bo'ladi. Uning umumiy yechimi $u(x) = c_1x + c_2$. u(0)=0 shartdan $c_2 = 0$ ni hosil qilamiz, bundan $u = c_1x$ $(c_1 \ne 0)$. a>0 ning hech bir qiymatida $u = c_1x$ $(c_1 \ne 0)$ yechim nolga aylana olmaydi. Demak, ekstremalning OB yoyida $O(0,0)$ nuqtaga qo'shma nuqta yo'q. Bundan esa uni markazi $O(0,0)$ bo'lgan ekstremallarning markaziy maydoniga kiritish mumkin. Ko'rsatish qiyin emaski, qidirilayotgan ekstremal $y = \frac{3x}{a}$ chiziqdan iborat bo'ladi va u $u = c_1x$ ekstremallarning markaziy maydoniga kiradi.

**Misol 11.** $\int_0^a (y'^2 - 4y^2 + e^{-x^2})dx, \quad (a \ne (n + \frac{1}{2})\pi),$

funksionalni $A(0,0)$ va $B(a,0)$ nuqtalardan o'tuvchi ekstremali uchun Yakobi sharti bajariladimi?

**Yechish.** Yakobi tenglamasi quyidagi ko'rinishda $u'' + 4u = 0$ bo'ladi. Uning umumiy yechimi $u(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$. u(0)=0 shartdan $c_2 = 0$

bo'lib $u(x) = c_1 \sin 2x$ ni hosil qilamiz. Agar $a < \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $0 < x \le a$ oraliqda $u(x)$ funksiya nolga aylana olmaydi va Yakobi sharti bajariladi. Agar $a > \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $0 < x \le a$ Yakobi tenglamasining yechimi $u(x) = c_1 \sin 2x$ $[0, a]$ kesmada yotuvchi $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtada nolga aylanadi va $y = 0$, $(0 \le x \le a)$ *ekstremalning yoyida* $A(0,0)$ *nuqtaga qo'shma* bo'lgan nuqta topiladi. Shunday qilib, $a > \frac{\pi}{2}$ bo'lganda $y = 0$ ekstremalni o'z *ichiga* oluvchi ekstremallarning markaziy maydoni mavjud emas.

Quyidagi masalalarda Yakobi shartini bajarilishi tekshirilsin:

**135.** $J[y] = \int_{-1}^{1}(12xy + y'^2 + x^2)dx, \quad y(-1) = -2, \quad y(1) = 0.$

**136.** $J[y] = \int_{0}^{a}(y'^2 + 9y^2 - 3x)dx, \quad y(0) = y(0) = 0.$

**137.** $J[y] = \int_{0}^{1}(1 + y'^2)dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$

**138.** $J[y] = \int_{0}^{a}(y'e^{y'} dx, \quad y(0) = 1, \quad y(a) = b, \quad (a > 0).$

**139.** $J[y] = \int_{0}^{2\pi}(y'^2 - y^2)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0.$

**140.** $J[y] = \int_{a}^{b} F(x, y')dx,$ funksionalning integral ostidagi ifodasi y ni oshkor
holda o'z ichiga olmasa u holda doimo har bir ekstremalni ekstremallar maydoniga kiritish mumkinligi ko'rsatilsin.

**Izoh.** Yakobi sharti $J[y(x)]$ funksionalni ekstremumga erishishi uchun zaruriy shart hisoblanadi, y'ani AB yoyning ekstremumga erishishtirayotgan ekstremalida A ga qo'shma bo'lgan nuqta $x_0 < x < x_1$ intervalda yotisyi mumkin emas. Masalan, $J[y] = \int_{0}^{a}(y'^2 + 1)dx, \quad y(0) = y(a) = 0$ funksional uchun y(x)=0 da *minimumga erishiladi. Bu* ekstremalda $O(0,0)$ nuqtaga qo'shma bo'lgan *nuqta mavjud emas.*

**Misol 12.** Quyidagi $J[y]=\int\limits_0^{\frac{5}{4}\pi}(y^2-y'^2)dx, \quad y(0)=y(\frac{5}{4}\pi)=0$,

funksional $(0,\frac{5}{4}\pi)$ intervalda yotuvchi O(0,0) *nuqtaga qo'shma* $O^*(\pi,0)$ nuqta bo'lganligi sababli, ( chunki, $u''+u=0$ Yakobi tengsizligining $x=0$ da nolga aylanuvchi yechimi $u(x)=c_1\sin x$ bo'ladi va $u(x)$ $x=\pi\in(0,\frac{5\pi}{4})$ nuqtada ham nolga aylanadi), $y=0$ ekstremalda ekstremumga erishishmaydi. Haqiqatda, $y=0$ ga yaqin $y_n(x)=\frac{\sin nx\frac{4}{5}}{n^2}$ egri chiziqni olaylik, ravshanki, $y(0)=y\left(\frac{5\pi}{4}\right)=0$ shartlar bajariladi va $y'_n(x)=\frac{4}{5n}\cos n\frac{4}{5}x$ bo'ladi. U holda, $J[0]=0$ da va ixtiyoriy butun $n\geq 2$ uchun

$$J[\frac{\sin nx\frac{4}{5}}{n^2}]=\int\limits_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin(\frac{4nx}{5})\sin(\frac{4nx}{5})}{n^4}dx-$$

$$-\int\limits_0^{\frac{5\pi}{4}}(\frac{4}{5\pi})^2\cos^2(\frac{4n}{5}x)dx=\frac{5\pi}{8n^2}(\frac{1}{n^2}-\frac{16}{25})<0$$

*ifodaga* ega bo'lamiz. Bundan $y(x)=0$ egri chiziqqa yaqin, funksionalga manfiy qiymat *beruvchi* egri chiziq mavjud *bo'lganligi* sababli, $y(x)=0$ ekstremalda berilgan funksional *minimumga* erishishmaydi. Endi $y(x)=0$ egri chiziqqa ixtiyoriy tartibli yaqinlik munosabatdagi $y_n(x)=\frac{1}{n}\sin\frac{4}{5}x$ egri chiziqlar oilasini qaraylik. Ko'rish qiyin emaski,

$$J[y_n]=\int\limits_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin^2\frac{4}{5}x}{n^2}dx-\int\limits_0^{\frac{5}{4}\pi}\frac{16}{25n^2}\cos^2(\frac{4}{5}x)dx=\frac{9\pi}{40n^2}>0$$

bo'ladi. Bundan berilgan funksionalning $y(x)=0$ ekstremalda maxsimumga ham erisha olmasligi kelib chiqadi.

**141.** Aytaylik, $J[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx,$ funksionalda *integral ostidagi* funksiya

$F$ $y$, $y'$ larning chegaralangan o'zgarish *sohasida* $y$, $y'$ lar bo'yicha uchunchi tartibli chegaralangan hosilalarga ega bo'lsin. Agar $y=y(x)$ va $y=y(x)+\eta(x)$ bir biriga yaqin ekstremallar bo'lsa, u holda kichik miqdorning yuqori tartibli aniqlik bilan u ekstremallar orasidagi birinchi tartibli masofani taqqoslaganda $\eta(x)$ *funksiya* quyidagi Yakobi tenglamasini *qanoatlantiradi*

$$F_{yy}\eta + F_{yy'}\eta' - \frac{d}{dx}(F_{yy'}\eta + F_{y'y'}\eta') = 0;$$

***2⁰ Lejandrning etarli sharti***

$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx,\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,$ funksionalning ekstremalini ekstremallar maydoniga mansub bo'lishligining yetarliylik sharti Lejandrning kuchaytirilgan sharti hisoblanadi.

Bunda qaralayotgan ekstremalning barcha nuqtalari uchun $F_{y'y'} > 0$ tengsizlikni bajarilishi talab etiladi, (yani, barcha $x \in [x_0, x_1]$ lar uchun).

**Misol 13.** Quyidagi $J[y] = \int_0^2 (y''^{\,}+ y^2)dx,\quad y(0) = 1, y(2) = 5,$ funksional berilgan. Bu funksional uchun $y = c_1x + c_2$ tog'ri chiziqlar ekstremallar bo'ladi. U holda, chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi izlayotgan ekstremal *y=2x+1 to'g'ri chiziqdan iborat. Bizning holimizda* $F_{y'y'} = 12y'^2 + 2$ va y=2x+1 ekstremalning barcha nuqtalarida $F_{y'y'} = 50 > 0$ bo'ladi. Bundan, Lejandrning yetarli shartini bajarilishi va y=2x+1 ekstremalni ekstremallar maydoniga mansub bo'lishi mumkinligi o'z o'zidan kelib chiqadi.

Demak, y=2x+1 ekstremal xos maydon tashkil qiluvchi $y = 2x + \alpha$, ($\alpha$ – parametr) bir parametrlik ekstremallar oilasiga mansub bo'ladi.

**Misol 14.** $J[y] = \int_{-1}^{1}(xy'^2 + 12y^2)dx,\ y(-1) = -1, y(1) = 1$ funksional berilgan.

**Yechish.** Bu funksional uchun Eyler tenglamasi

$$x^2y'' + 2xy' - 12y = 0,$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Uning umumiy echimi $y = C_1x^2 + C_2x^{-4}$. Unda chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi izlayotgan ekstremal $y = x^3$ chiziqdan iborat bo'ladi. Buni maydonga kiritish mumkin emas. Uni o'z ichiga oluvchi ekstremal yagona $y = \alpha x^3$ bir parametrlik ekstremallar oilasi hisoblanadi. Va nihoyat, *bu oila $OX$* abscissa o'qi *bilan $x = 0$ nuqtani* o'z *ichiga oluvchi* sohani qoplay olmaydi. Bu holda $F_{y'y'} = 2x^2$ bo'lib, $x = 0$ da Lejandr sharti bajarilmaydi.

*Quyidagi funksionallarning ekstremallarini* maydoniga mansubligi tekshirilsin.

142. $J[y]=\int_0^1 (y'^2 - yy'^3)dx, \quad y(0)=y(1)=0.$

143. $J[y]=\int_0^a y'^3 dx, \quad y(0)=0, \quad y(a)=b, (b>0).$

144. $J[y]=\int_{x_0}^{x_1} n(y)\sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1, \; n(y)>0.$

145. $J[y]=\int_0^a (6y'^2 - y'^4)dx, \quad y(0)=0, \quad y(a)=b, \; a>0, b>0.$

## 8 §. Funksional ekstremumining yetarli sharti

Quyidagi funksional uchun oddiy variatsion masalasini qaraymiz

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx, \tag{1}$$

$$y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1. \tag{2}$$

**1°.** ***Veyershtrassning yetarli sharti.*** Quyidagi tenglik bilan aniqlangan $E(x,y,p,y')$ funksiya Veyershtrass funksiyasi, deyiladi

$$E(x,y,p,y')=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p),$$

bu yerda, $p=p(x,y)$ – qaralayotgan (1),(2) variatsion masalaning **(x,y) nuqtadagi** ekstremallar maydonining og'ishi.

***Kuchsiz ekstremumning yetarli shartlari.***

C egri chiziq (1) funksionalga kuchsiz ekstremum beradi, agar:

1. C egri chiziq (1)-funksionalning (2) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremali bo'lsa, ya'ni, (1) funksional uchun (2) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi C egri chiziq Eyler tenglamasining echimi bo'lsa.

2. C ekstremal ekstremal maydoniga mansub bo'lishi mumkin, xususan, bu bo'ladi, agar Yakobi sharti bajarilsa.

3. C ekstremalga yaqin barcha $(x,y)$ nuqtalarda va $p(x,y)$ ga yaqin $y'$ ning qiymatlari uchun $E(x,y,p,y')$ Veyershtrass funksiyasi ishorasini saqlashi lozim. Agar $E\le 0$ bo'lsa, u holda $J[y]$ funksional $C$ da maxsimumga ega bo'ladi, agar $E\ge 0$ bo'lsa, u holda $J[y]$ funksional $C$ da minimumga ega bo'ladi.

***Kuchli ekstremumning yetarli shartlari.***

C egri chiziq (1) funksionalga kuchli ekstremum beradi, agar:

1. C egri chiziq (1) funksionalga (2) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremal bo'lsa.

2. C ekstremal ekstremallar maydoniga mansub bo'lishi mumkin.

3. $C$ ekstremalga yaqin barcha $(x,y)$ nuqtalarda va $y'$ ning ixtiyoriy qiymatlari uchun $E(x,y,p,y')$ Veyershtrass funksiyasi ishorasini saqlaydi. $E \le 0$ bo'lganda maxsimum, $E \ge 0$ bo'lganda esa minimum bo'ladi.

**Eslatma.** Ekstremum mavjudligida Veyershtrassning etarlilik sharti quyidagicha ma'noga ega, agar ekstremal nuqtalarda $y'$ ning biror bir qiymati uchun Y funksiya qarama-qarshi ishoraga ega bo'lsa, u holda kuchli ekstremumga erishmaydi. Agar bu xossa $y'$ ning qiymati P ga etarlicha yaqin joylarda ham o'rinli bo'lsa, u holda kuchsiz ekstremumga ham erishmaydi.

**Misol 1.** $J[y]=\int\limits_0^1 (y'^3+y')dx,\ y(0)=0,\ y(1)=2.$ funksional ekstremumga tekshirilsin.

**Yechish.** Ushbu funksional uchun Eyler tenglamasi $y'y''=0$ ko'rinishda bo'ladi, shuning uchun ekstrimallar $y(x)=C_1x+C_2$ to'g'ri chiziqlardan iborat bo'ladi. Berilgan chegaraviy shartlarini qanoatlantiruchi ekstremal $y=2x$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Ekstremal nuqtalarida maydonning og'ishi $p=2$ ga teng. Ravshanki, $y=2x$ ekstremal markazi O(0,0) nuqtaga bo'lgan $y = Cx$ ekstremallarning markaziy maydoniga mansub bo'ladi. Yana, bu holda Yakobi shartini bajarilishini tekshirish qiyin emas. Bu hol uchun Yakobi tenglamasi $-\frac{d}{dx}(6y'u')=0$ ko'rinishda bo'ladi, bu yerdan ekstremal tenglamasiga asosan, $y'=2$ ga ega bo'lamiz. Bundan, Yakobi tenglamasi $u''(x)=0$ ko'rinishda bo'ladi, echimi $u(x)=C_1x+C_2$, $u(0)=0$ shardan $C_2=0$ ni olamiz. Bu $u=C\ u=C_1x$ echim $C_1\neq 0$ da $x=0$ nuqtadan tashqari, hech qayerda nolga aylanmaganligidan, Yakobi shartining bajarilishi kelib chiqadi.

Endi, Veyershtrass funksiyasini tuzamiz

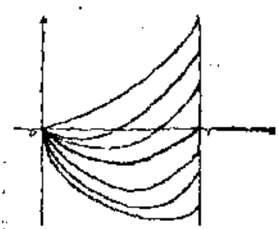
$$E(x,y,p,y')=y'^3+y'-p^3-p-(y'-p)(3p^2+1)=(y'-p)^2(y'+2p).$$

Birinchi ko'paytuvchi ixtiyoiy $y'$ da doimo manfiy emas, ikkinchisi esa $y'$ ning 2 ga yaqin qiymatlarida musbat. Bundan kuchsiz ekstremum mavjudligining barcha shartlari bajarildi. Biroq, oson ko'rish mumkinki, agar $y'<-4$ bo'lsa, u holda E funksiya manfiy bo'ladi va kuchli ekstremumning yetarli sharti bajarilmaydi, chunki kuchli ekstremum shartida Veyershtrass funksiyasi E $y'$ ning ixtiyoriy qiymatida ishorasini saqlashi talab qilinadi. Yuqoridagi eslatmani hisobga olgan holda, bu hol uchun kuchli ekstremum yo'q, degan xulosaga kelamiz.

**Misol 2.** $J[y]=\int (x+2y+\frac{1}{2}y'^2)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=0,$ funksional ekstremumga tekshirilsin.

**Yechish.** Bu funksional uchun Eyler tenglamasi $y''=2$ ko'rinishga ega bo'lib, ekstremal $y=x^2+C_1x+C_2$ paraboladan iborat bo'ladi. Chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremal $y=x^2-x$. Yakobi tenglamasini tuzamiz $-\frac{d}{dx}(u')=0$ yoki $u''=0$. Uning umumiy yechimi $u(x)=C_1x+C_2$. $u(0)=0$ shartdan $C_2=0$ bo'ladi. $C_1\neq 0$ da $u(x)=C_1x$ $[0,1]$ kesmada $x=0$ nuqtadan tashqari hech qayerida nolga aylanmaydi, u holda Yakobi sharti bajariladi va demak, $y=x^2-x$ ekstremal, markazi $O(0,0)$ nuqtada bo'lgan ekstremallarning markaziy maydoniga mansub bo'ladi, aynan: $y=x^2+Cx$.

Veyershtrass funksiyasi $E(x,y,p,y')=\frac{1}{2}(y'-p)^2$ ko'rinishda bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, $y'$ ning ixtiyoriy qiymatlari uchun $E=\frac{1}{2}(y'-p)^2\geq 0$ o'rinli bo'ladi. Bundan, $y=x^2-x$ ekstremalda berilgan funksional $J[x^2-x]=\frac{1}{3}$ ga teng kuchli minimumga erishadi (8- rasm).



8- rasm

Quyidagi funksionallar ekstremumga tekshirilsin:

**146.** $J[y]=\int_0^1 e^x\left(y^2+\frac{1}{2}y'^2\right)dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=e.$

**147.** $J[y]=\int_0^1 e^y y'^2\,dx;\quad y(0)=0\ y(0)=0,\quad y(1)=\ln 4.$

**148.** $J[y]=\int_1^2 \frac{x^3}{y'^2}dx,\quad y(1)=1,\quad y(2)=4.$

**149.** $J[y]=\int_0^a \frac{dx}{y'^2};\quad y(0)=0,\quad y(a)=b,\ a>0, b>0.$

**150.** $J[y]=\int_0^1 (1+x)y'^2dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$

151. $J[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(y^2-y'^2)dx\,,\quad y(0)=1,\quad y(\frac{\pi}{2})=1.$

152. $J[y]=\int\limits_{-1}^{2}y'(1+x^2y')dx,\quad y(-1)=1,\quad y(2)=4.$

153. $J[y]=\int\limits_{-1}^{1}(y'^3-y'^2)dx\,,\quad y(-1)=-1,\quad y(1)=3.$

$2^0$. ***Lejandrning yetarli shartari.*** Aytaylik, $F(x,y,y')$ funksiya uzluksiz xususiy hosilalarga $F_{y'y'}(x,y,y')$ ega va C ekstremal ekstremallar maydoniga mansub bo'lsin.

Agar C ekstremalda $F_{y'y'}>o$ ga ega bo'lsak, u holda C egri chiziqda kuchsiz minimumga erishiladi; agar C ekstremalda $F_{y'y'}<0$ bo'lsa, u holda C egri chiziqda (1) funksional kuchsiz maxsimumga erishadi. Bu shartlar Lejandrning kuchaytirilgan shartlari deyiladi.

Qachonki, $y'$ ning ixtiyoriy qiymatlarida C ekstremalga yaqin $(x,y)$ nuqtalarda $F_{y'y'}(x,y,y')\geq 0$ bo'lsa, bu holda kuchli minimumga ega bo'lamiz. Argumentlarning ko'rsatilgan qiymatlari uchun $F'_{y'y'}(x,y,y')\leq 0$ bo'lsa, u holda kuchli maxsimumga ega bo'lamiz.

**Misol 3.** $J[y(x)]=\int\limits_0^1(y'^3-\alpha y^2)dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=-2$ funksional ekstremumga tekshirilsin, bu erda $\alpha$ - ixtiyoriy haqiqiy son.

**Yechish.** Integral ostidagi funksiya faqat $y'$ ga bog'liq bo'lganligi uchun ekstremal $y=C_1x+C_2$ to'g'ri chiziqlardan iborat. Chegaraviy shartalarni qanoatlantiruvchi ekstremal $y=-2x$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, uni $y=Cx$ exstremallarning markaziy maydoniga kiritish mumkin. Bu extremalda maydonning og'ishi $p=-2$ ga teng. So'ngra, $F_{y'y'}=6y'$ ni topamiz. Berilgan extremalda $F_{y'y'}=-12<0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni $y=-2x$ chiziqda funksional kuchsiz maxsimumga erishadi. $y'$ ning ixtiyoriy qiymatlarida $F_{y'y'}$ ishora saqlanmaydi, bundan, kuchli maxsimum sharti bajarilmaydi. Bu holda, Veyershtrass funksiyasi $E(x,y,p,y')$ quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$E(x,y,p,y')=(y'-p)^2(y'+2p)$$

va $y'$ ning ayrim qiymatlarida u qarama-qarshi ishoraga ega bo'ladi. Eslatmani hisobga olgan holda, bu hol uchun kuchli maxsimum yo'q degan xulosaga kelamiz.

**Misol 4.** $J[y(x)]=\int\limits_0^2(e^{y'}+3)dx,\quad y(0)=0,\quad y(2)=1$ funksional ekstremumga tekshirilsin.

**Yechish.** Ekstremal $y=C_1x+C_2$ chiziqlardan iborat. Chegaraviy shartalarni qanoatlantiruvchi ekstremal $y=\frac{x}{2}$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, uni $y=Cx$ exstremallarning markaziy maydoniga kiritish mumkin. Bundan, berilgan funksional $y=\frac{x}{2}$ ekstremalda kuchli minimumga erishadi.

**Misol 5.** $J[y]=\int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx$, $y(0)=0$, $y(a)=y_1$, funksional ekstremumga tekshirilsin.

**Yechish.** Integral ostidagi funksiya $x$ bog'liq emasligidan

$F-y'F_{y'}=\overline{C}_1$ ni olamiz, yoki bizning hol uchun $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y}}=\overline{C}_1$, bundan

$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y}}=\overline{C}_1$, yoki $y(1+y'^2)=C_1$, bu erda $C_1=\frac{1}{\overline{C}_1}$ bo'ladi. $y'=ctg\frac{t}{2}$ deb olamiz.

Bundan $y=C_1\sin^2\frac{t}{2}=\frac{C_1}{2}(1-\cos t)$ ga ega bo'lamiz. So'ngra, $dx=\frac{dy}{ctg\frac{t}{2}}=\frac{C_1\sin t dt}{2ctg\frac{t}{2}}=C_1\sin^2\frac{t}{2}dt$. Bu tenglamani integrallab,

$x=C_1\int\frac{(1-\cos t)dt}{2}=\frac{C_1}{2}(t-\sin t)+C_2$ ni olamiz. Shunday qilib,

$$\left.\begin{aligned} x&=\overline{C}_1(t-\sin t)+C_2,\\ y&=\overline{C}_1(1-\cos t)\end{aligned}\right\}$$

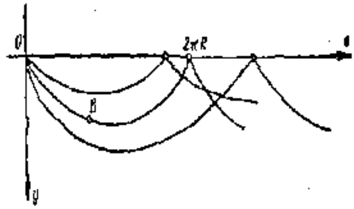
sikloidalar oilasining parametrik tenglamasiga ega bo'lamiz. $y(0)=0$ shartdan $C_2=0$ ni topamiz

$$\left.\begin{aligned} x&=C(t-\sin t),\\ y&=C(1-\cos t)\end{aligned}\right\}$$

sikloidalar dastasi

$$\left.\begin{aligned} x&=R(t-\sin t),\\ y&=R(1-\cos t)\end{aligned}\right\}$$

ekstremalni o'z ichiga oluvchi markazi $O(0,0)$ nuqtada bo'lgan markaziy maydonni tashkil qiladi. Bu erda $R$, agar $a<2\pi R$ bo'lsa, tsikloidaning ikkinchi chegaraviy $B(a,y_1)$ nuqta orqali o'tishi shartidan aniqlanadi (9- rasm).




9-rasm

**Lejandr shartidan foydalanamiz.** $y'$ **ning ixtiyoriy qiymatida** $F_{y'y'} = \dfrac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{3/2}} > 0$ ga ega bo'lamiz. Demak,

$$\left.\begin{array}{l} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t) \end{array}\right\}$$

*sikloidada* $a < 2\pi R$ **uchun berilgan funksional kuchli minimumga ega bo'ladi.**

**Lejandr shartidan foydalanib, quyidagi funksionallar ekstremumga tekshirilsin.**

**154.** $J[y] = \int\limits_0^1 (y'^2 + x^2)dx; \quad y(0) = -1, \quad y(1) = 1.$

**155.** $J[y] = \int\limits_2^3 \dfrac{x^3}{y'^2}dx; \quad y(2) = 4, \quad y(3) = 9.$

**156.** $J[y] = \int\limits_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3)dx; \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 0.$

157. $J[y] = \int\limits_0^a (1 - e^{-y'^2})dx; \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b(a > 0).$

158. $J[y] = \int\limits_0^1 yy'^2dx; \quad y(0) = p > 0, \quad y(1) = q > 0$

**159.** $\varepsilon$ **parametrning har xil qiymatlari uchun**

$$J[y] = \int\limits_0^1 (\varepsilon y'^2 + y^2 + x^2)dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

**funksional ekstremumga tekshirilsin.**

**Misol 6.** (Eyler masalasi). $l$ uzunlikdagi sterjen uchlari tiralgan bo'lib, $P$ bosim kuchi qo'yilgan. $P$ ning aniqlangan qiymatida (Eylerning kritik kuchi) sterjenda bo'ylama egilish yuz beradi. Bo'ylama egilishni hosil qiluvchi (yuzaga keltiruvchi) $P$ kuchning eng kichik qiymatini aniqlang.

**Yechish.** Aytaylik, $E$-elastiklik moduli, $I$- sterjenning ko'ndalang kesimining eng kichik inersiya momenti, $\rho$- egrilik radiusi, $\varphi$- urunmaning o'q bilan hosil qilgan burchagi bo'lsin.

Egilishdagi potensial energiya quyidagi formula orqali aniqlanadi

$$U_1 = \frac{1}{2} EI \int_0^l \frac{dS}{\rho^2}.$$

Sterjen uchlarini quyidagi

$$\sigma = \int_0^l (1 - \cos\varphi) dS$$

kattalikka tushirishda sterjenning potensial energiyasi

$$U_2 = P_\sigma = Pl - P\int_0^l \cos\varphi dS.$$

ga kamayadi. Agar potensial energiya deformatsiyagacha nolga teng bo'lsa, u holda deformatsiyadan so'ng u quyidagi formula orqali ifodalanadi

$$U = U_1 - U_2 = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EI \frac{1}{\rho^2} + P\cos\varphi\right) dS - Pl.$$

$\rho = \frac{dS}{d\varphi}$ bo'lgani uchun va ($\varphi$ ning kichik qiymatlarida) $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ bo'lsa, u holda

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \left[ EI\left(\frac{d\varphi}{dS}\right)^2 - P\varphi^2 \right] dS \approx \frac{1}{2}\int_0^l \left[ EI\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 - P\varphi^2 \right] dx.$$

Bu holda muvozanat holatda potensial energiya eng kichik qiymat **qabul qiladi**. Shunung uchun, masalaning yechimi

$$J[\varphi] = \int_0^l \left[ EI\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 - P\varphi^2 \right] dx.$$

integralning minimumini topishga keltiriladi. Bu holda

$$F = EI\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 - P\varphi^2.$$

bo'ladi va Eyler tenglamasi

$$\varphi'' + \alpha^2\varphi = 0, \text{ bu yerda } \alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglamaning umumiy integrali quyidagicha bo'ladi

$$\varphi = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x.$$

$\varphi$ ning kichik qiymatlarida $tg\varphi \approx \varphi$ bo'ladi va bundan tashqari, $tg\varphi = y'$ ligidan

$$y' = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x.$$

bo'ladi. Bu erdan

$$y(x) = -\frac{C_1 \cos\alpha x}{\alpha} + \frac{C_2 \sin\alpha x}{\alpha} + c.$$

Agar sterjenning pastki uchi koordinata boshida bo'lsa, u holda $x=0$ da $y=0$ bo'ladi, demak, $C_1=C=0$ va $y(x)=\frac{C_1}{\alpha}\sin\alpha x$. Lejandr va Yakobi shartlarining bajarilishini tekshiramiz. Ravshanki, Lejandr sharti $\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi'^2}=2EI>0$ bajariladi. Yakobi tenglamasining ko'rinishi quyidagicha

$$EIz'' + Pz = 0 \text{ yoki } z'' + \alpha^2 z = 0,\ z(0)=0.$$

bo'ladi. Shuning uchun Yakobi tenglamasining yechimi $z=A\sin\alpha x$ bo'ladi. $z$ funksiya $x_k=\frac{k\pi}{\alpha}(k=1,2,...)$ da nolga aylanganligi sababli Yakobi sharti, agar $l\geq\frac{\pi}{\alpha}$ bo'lsa, bajariladi. Bundan $P\geq\frac{\pi^2}{l^2}EI$. Eyler kritik kuchining eng kichik qiymati $P_{min}=\frac{\pi^2}{l^2}EI$ bo'ladi. Shuning uchun $y=\frac{C_1}{\alpha}\sin\frac{\pi x}{l}$ egilish egri chizig'ining tenglamasini beradi.

**3⁰. *Figuratrissa.*** Aytaylik, bizga

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

korinishdagi funksional berilgan bolsin. $x,y$ larni parametr, deb hisoblab, hamda $Y=F(x,y,y')$ funksiyani $y'$ argumentning funksiya deb qaraymiz.

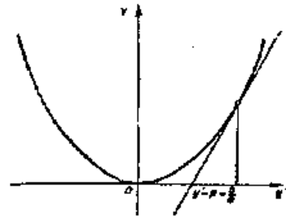
Ushbu funksiyaning $(y',Y)$ o'zgaruvchilar tekisligidagi grafigi figuratrissa, deb ataladi. $E(x,y,p,y')$ Veyshtrass funksiyasi bu figuratrissaga ordinatasi va absissaning $y'=p$ nuqtadan o'tuvchi figuratrissaga o'tkazilgan urinma ayirmasiga teng ekanligini tekshirish qiyin emas. $y'$ ning ayrim qiymatlari uchun Veyshtrass funksiyasining ishorasini o'zgarmasligi figuratrissani urinmaning ustida yoki $y'$ ning korsatilgan qiymatlari uchun urinmaning ostida yotishligini anglatadi. Ushbu holatda kuchsiz ekstremum o'rinli bo'ladi. Agar figuratrissa $x,y$ parametrlarning extremal nuqtalariga yaqin qiymatlari va $y'$ ning barcha qiymatlari uchun urinmaning bir tomonida yotsa, u holda kuchli ekstremum o'rinli bo'ladi.

Lejandrning yetarlilik sharti ushbu iboralarda quyidagicha ifodalanadi: agar $x,y$ ning ekstremalga yaqin barcha nuqtalari uchun figuratrissa hamma yerda qabariq yoki botiq bo'lsa, u holda kuchli ekstremum o'rinli bo'ladi.

**Misol 7.** $J[y]=\int_0^a y'^3dx$, $y(0)=0$, $y(a)=b$, $b>0$

funksional ekstremumga tekshirilsin.

**Yechish.** Ekstremallar $y=C_1x+C_2$ chiziqlardan iborat. Izlanayotgan ekstremal $y=\frac{b}{a}x$ tenglamadan aniqlanadi. U ekstremallarning markaziy maydoniga mansub bo'ladi. Bu holda figuratrissa $y = y'^2$ parabo'ladan iborat bo'ladi (10- rasm). Bu erdan figuratrissani ixtiyoriy $a$ va $b$, $a \neq 0$ larda $p = \frac{b}{a}$ nuqtadan o'tkazilgan urinmaning ustida to'la yotganini ko'rish qiyin emas. Demak, $y = \frac{b}{a}x$ ekstremal berilgan funksionalga kuchli minimum beradi.

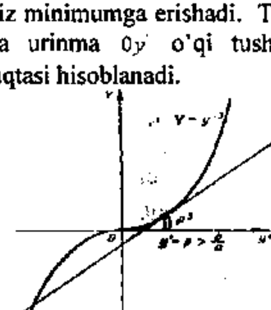


10- rasm

**Misol 8.** $J[y] = \int_0^a y'^3 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad b > 0,$

funksionalni ekstremumga tekshirilsin.

**Yechish.** Y=bx/a to'g'ri chiziq qidirilayotgan ekstremal hisoblanadi. U markazi O(0.0) nuqtada bo'lgan y=cx ekstremallar markaziy maydoniga mansub. Figuratrissa $Y=(y')^3$ kubik parabola hisoblanadi (11- rasm). Figuratrissa $y'$ ni p=b/a qiymatga etarlicha yaqin qiymatlari uchun obtsissa bilan $y' = \frac{b}{a}$ nuqtadan o'tkazilgan urinmaning ustida yotadi. Chizmadan ko'rinib turibdiki, figuratrissa urinmani absissa bilan $Y^1$=-2b/a niqtada kesadi hamda bu nuqtaning chaprog'ida urinma ustida joylashgan. Demak, berilgan funksional y=bx/a ekstrimalda kuchsiz minimumga erishadi. Takidlab o'tish lozimki, agar p=0 bolsa, figuratrissaga urinma $0y'$ o'qi tushiniladi, O(0,0) nuqta esa figuratrissaning egilish nuqtasi hisoblanadi.

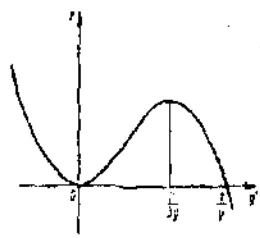


11- rasm

8 § dagi eslatmani hisobga olgan holda, figuratrissa O(0.0) nuqtaning yetarlicha kichik atrofida musbat hamda manfiy ordinatalarga ega bo'lishini ko'ramiz. Demak, $E(x,y,p,y')$ Veyshtrass funksiyasi $y'$ ning $p=0$ ga hohlagancha yaqin qiymatlarida qarama-qarshi ishoraga ega bo'ladi va bundan, bu holda berilgan funksional kuchsiz ekstremga erishmaydi.

**Misol 9.** $J[y]=\int_0^1 (y'^2 - yy'^3)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$, variatsion masalada $y=0$ ekstremal funksionalga kuchsiz minimum berishligi ko'rsatilsin.

**Yechish.** Bu holda Lejandr sharti $F_{y'y'}\big|_{y=0} = (2-6yy')\big|_{y=0} = 2>0$, ni beradi, ya'ni $y=0$ ekstremalda kuchsiz minimumga erishadi. $y=0$ da kuchli minimumga erishmasligini ko'rsatamiz. $y>0$ qiymatlar uchun $Y=y'^2-yy'^3$ figuratrissani quramiz.



12- rasm

Chizmadan ko'rinib turibdiki, figuratrissaga absissa bilan p=0 nuqtadan o'tkazilgan urinma figuratrissani $y'=\frac{1}{y}$ nuqtada kesadi. Shunday qilib, $(x,y)$ nuqta uchun, bu erda $y>0$, $y=0$ ekstremalga yaqin nuqtalarda $E(x,y,p,y')$ Veyshtrass funksiyasi $y'$ ni $\frac{1}{y}$ dan kichik qiymatlarida musbat, y'>1/y da esa manfiy bo'ladi. 8 § dagi eslatmaga ko'ra kuchli minimum yo'q. Xuddi shuningdek holat, $y<0$ uchun ham o'rinli (12- rasm).

Bu misol ixtiyoriy $y'$ uchun ekstremalda $F_{y'y'}>0$ shartni bajarilishidan kuchli ekstremumga ega ekanligi kelib chiqmasligini ko'rsatish bilan xarakterlidir.

Figuratrissalar yordamida quyidagi funksionallar ekstremumga tekshirilsin:

160. $J[y]=\int_0^1 (1+x)y'^2\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=-2.$

161. $J[y]=\int_{-1}^2 y'(1+x^2y')dx,\quad y(-1)=y(2)=1.$

162. $J[y]=\int_0^a (1-e^{-y'^2})dx,,\quad y(0)=0,\quad y(a)=b,\quad (a>0,\quad b>0).$

163. $J[y]=\int_0^a (6y'^2-y'^4+yy')dx,,\quad y(0)=0,\quad y(a)=b,\quad (a>0,\quad b>0).$

**Izoh.** Ikkinchi tartibli variatsiya bo'yicha ekstremumning yetarlilik sharti. Ikkinchi tartibli variatsiyani manfiymasligi zarur, lekin berilgan egri chiziqda $J[y]$ funksionalni minimumga erishishi uchun etarli emas.

**Misol 10.** $C(0,1)$ fazoda $J[y]=\int_0^1 y^2(x)(x-y(x))dx$ funksionalni ko'raylik. Eyler tenglamasi $F_y=0$ ko'rinishga ega, yoki $y=0$. Funksionalning $y=0$, $0\le x\le 1$, ekstremaldagi ikkinchi variatsiyasi $\delta^2 J[0,\delta y]=\int_0^1 x(\delta y)^2dx$ har bir $\delta y\ne 0$ uchun musbat bo'ladi. Biroq, $J[y]$ funksional nolning har qanday atrofida manfiy qiymatni qabul qiladi. Berilgan yetarlicha $\varepsilon>0$ da

$$y_\varepsilon(x)=\begin{cases}-x+\varepsilon, & 0\le x<\varepsilon,\\ 0, & x\ge\varepsilon.\end{cases}$$

funrsiyani olamiz. U holda, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun $J[y]=-\frac{\varepsilon^4}{6}<0$ bo'ladi.

**Ta'rif.** Qandaydir normallangan fazoda aniqlangan $J_2[h]$ **ni** kvadratik funksional kuchli musbat deyiladi, agar shunday o'zgarmas $k>0$ mavjud bo'lsaki, barcha $h$ lar uchun

$$J_2[h]\ge k\|\delta y\|^2$$

o'rinli bo'lsa.

***Minimumning yetarli sharti.*** Normallangan fazoda aniqlangan J[y] funksionalning $y=y_0$ statsionar nuqtada minimumga ega bo'lishi uchun $y=y_0$ da uning ikkinchi variatsiasi kuchli musbat bolishi yetarli, ya'ni

$$\delta^2 J[y_0,\delta y]\ge k\|\delta y\|^2$$

tengsizlikni bajarilishi etarli, bu yerda k>0-const.

**4⁰.** Aytaylik, $n$ ta $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$, funksiyaga bog'liq bo'lgan

$$J[y_1,y_2,\dots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n'\right)dx \tag{3}$$

funksionalni quyidagi chegaraviy shartlar ostida

$$y_k(x_0)=y_{k0},\ y_k(x_1)=y_{k1},\quad (k=1,2,\dots,n)$$

ekstremumini topish talab etilsin.

(3) funksional qaralayotgan ekstremallarining barcha nuqtalarida $F_{y'y'}>0$,

$$\begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_1'y_1'} \end{vmatrix}>0,\ldots,\quad \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} & \ldots & F_{y_1'y_n'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \ldots & F_{y_2'y_n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} & \ldots & F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix}>0 \qquad (4)$$

shartlarni bajarilishiga kuchaytirilgan Lejandr sharti, deb ataladi.

$[x_0,x_1]$ kesmani $x_0$ nuqtasiga qo'shma bo'lgan nuqtani o'z ichiga olmaslik shartini talab qilish, kuchaytirilgan Yakobi sharti, deb ataladi.

(4) kuchaytirilgan Lejandr sharti bilan kuchaytirilgan Yakobi sharti birgalikda (3) funksionalni hech bo'lmaganda kuchsiz minimumi mavjud bo'lishini ta'minlaydi.

**Misol 11.**

$$J[y,z]=\int_0^1 y'^2+z'^2\,dx\ , \qquad (5)$$

$$y(0)=z(0)=0,\quad y(1)=1,\quad z(1)=2, \qquad (6)$$

funksional ekstremumga tekshirilsin.

**Yechish.** (5) funksional uchun Eyler tenglamasi

$$y''=0,\quad z''=0,$$

bo'lib, bundan

$$\left.\begin{aligned} y(x)&=C_1+C_2x \\ z(x)&=C_3+C_4x \end{aligned}\right\}$$

ga ega bo'lamiz. (6) shartlardan foydalanib, quyidagini topamiz: $C_1=0$, $C_2=1$, $C_3=0$, $C_4=2$. Qidirilayotgan ekstremal koordinata boshidan o'tuvchi

$$\left.\begin{aligned} y(x)&=x, \\ z(x)&=2x, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Bundan

$$F_{y'y'}=2,\quad F_{y'z'}=0,\ F_{z'y'}=0,\ F_{z'z'}=2,$$

ga ega bo'lamiz.

$$F_{y'y'}=2>0,\quad \begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4>0,$$

kuchaytirilgan Lejandr sharti bajariladi. Endi, kuchaytirilgan Yakobi shartining bajarilishini tekshiramiz.

Qo'shma nuqtaning ta'riflaridan birini keltiramiz ([4] ga qarang). Aytaylik, (1) funksionalning boshlang'ich $(x^0, y_{10}, y_{20},\ldots, y_{n0})$ nuqtadan chiquvchi, o'zaro yaqin bo'lgan, lekin chiqli bogliq bo'lmagan yo'nalishli ekstremallar oilasiga ega bo'laylik.

**Ta'rif.** $x^* \in [x_0, x_1]$ nuqta $x^0$ nuqta bilan qo'shma deyiladi, agarda boshlang'ich $(x^0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ nuqtadan chiquvchi va berilgan ekstremalga yetarlicha yaqin ekstremallar ketma-ketligi mavjud bo'lib, bu ekstremallarning har biri berilgan ekstremalni kesib o'tsa va absissaning kesishish nuqtalarida $x^*$ nuqtaga yaqinlashsa.

Ushbu misolda ekstremallar (7) to'g'ri chiziqdan iborat. (0,0,0) nuqtadan chiquvchi barcha ekstremallar (7) ekstremalni faqat shu nuqtada kesadi. Bundan $x$ ning o'zgarish kesmasi [0,1] $x_0=0$ nuqtaga bilan qo'shma bo'lgan nuqtani o'z ichiga olmaydi. Shunday qilib, kuchaytirilgan Lejandr hamda Yakobi shartlari ham bajariladi, bundan esa (7) ekstremal (5) funksionalga kuchsiz minimum berishligi kelib chiqadi.

Quyidagi funksionallar ekstremumlikga tekshirilsin:

**164.** $J[y(x), z(x)] = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx, \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = 2, \quad z(1) = 4.$

**165.** $J[y(x), z(x)] = \int_0^1 (y'^2+z'^2+4z)\,dx, \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad z(1) = 0.$

## 9 §. Shartli ekstremum

$1^0$. ***Izoperimetrik masala.*** Aytaylik, ikkita $F(x, y, y')$ va $G(x, y, y')$ funksiyalar berilgan bo'lsin. Barcha $y = y(x) \in C_1[x_0, x_1]$ egri chiziqlar orasidan

$$k[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx$$

funksional berilgan l qiymatini qabul qiluvchi shunday egri chiziqni aniqlash kerakki, natijada

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

funksional ekstremal qiymatni qabul qilsin. F va G funksiyalar nisbatan ular $x_0 \le x \le x_1$ oraliqda va $y$, $y'$ larning ixtiyoriy qiymatlarida birinchi va ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin, deb faraz qilamiz.

***Eyler teoremasi.*** Agar $y = y(x)$ egri chiziq

Ииииииииииииии $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$

funksionalga

$$k[y]=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')dx=l, \quad y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$$

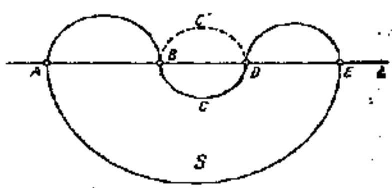
shart ostida ekstremum bersa va agar $y=y(x)$ $K$ funksionalning ekstremali bo'lmasa, u holda shunday $\lambda$ o'zgarmas son mavjudki, $y=y(x)$ egri chiziq

$$L=\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y,y')+\lambda G(x,y,y')]dx$$

funksionalning ekstremali bo'ladi.

**Misol 1.** (Didona masalasi). 2L uzunlikdagi yopiq egri chiziqlar bilan chegaralangan shakllar ichidan eng katta yuzani qamrab oluvchisini toping.

**Yechish.** Dastlab, ko'rilayotgan egri chiziq qavariq bo'lishi kerakligini anglaymiz. Aks holda shunday $L$ to'gri chiziq tanlab olish mumkinki, BCD qismini $AE$ to'gri chiziqqa nisbatan simmetrik yasasak, u holda uning uzunligi $L$ to'gri chiziqqa teng bo'lib, u egallagan yuza dastlabkisining yuzasidan katta bo'ladi (13- rasm).




13- rasm

Shu narsani kuzatish mumkinki, agar har qanday to'g'ri chiziqlar yopiq egri chiziqni teng 2 ga bo'lsa, bu to'gri chiziqlar yopiq egri chiziqni o'rab turadigan yuzani ham teng ikkiga bo'ladi. Buni isbotlash uchun teskarisidan faraz qilamiz. $L_1$ tog'ri chiziq egri chiziqni teng ikkiga bo'lsin-u, lekin bo'laklarning yuzlari har xil bo'lsin. $L_1$ to'g'ri chiziq atrofida katta bo'lakni simmetrik ko'chirsak , hosil bo'lgan yuza egri chiziq orasidagi yuzalarning dastlabkisidan katta bo'lib qoladi. Demak, ziddiyat.

Endi, OX o'qi o'rnida yopiq egri chiziqni teng 2 ga bo'luvchi to'g'ri chiziqlardan istalganini tanlab olamiz va masalani quyidagicha tartibda qo'yamiz. Shunday $y=y(x)$, $y(-a)=y(a)=0$ chiziq topilsinki, qaysiki $l>2a$ berilgan uzunlikda chegaralangan OX o'qidagi $-a\le x\le a$ kesma bilan eng katta yuzani o'z ichiga olsin. Shunday qilib, masala

$$K[y(x)]=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2(x)}dx=l, \qquad (l>2a),$$

funksionalning qo'shimcha

$$J[y(x)]=\int_{-a}^{a}y(x)dx=l, \qquad y(-a)=y(a)=0, \qquad (1)$$

shart ostida ekstremalini topishga keltiriladi. Yordamchi funksiyani tuzamiz:

$$H = F + \lambda G = y(x) + \lambda\sqrt{1+y'^2(x)}dx$$

va yordamchi

$$L = \int_{-a}^{a} H(x, y, y')dx. \qquad (2)$$

funksionalni qaraymiz. Bu (2) funksional uchun Eyler tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 1,$$

bundan

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x + c_1.$$

Bu tenglamani $y'$ ga nisbatan yechsak,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+c_1}{\sqrt{1-(x+a)^2}}. \qquad (3)$$

Mazkur (3) tenglamani integrallab,

$$(x+c_1)^2 + (y+c_2)^2 = \lambda^2.$$

ga ega bo'lamiz. Bu tenglama markazi $(-c_1, c_2)$ nuqtada bo'lgan $\lambda$ radiusli aylana tenglamasi bo'ladi. $c_1, c_2$ o'zgarmaslarni va $\lambda$ sonni $y(-a) = y(a) = 0$ chegaraviy shartlardan hamda (1) izometrik shartdan topamiz

$$\left.\begin{array}{l} c_2{}^2 = \lambda^2 - (c_1 - a)^2, \\ c_2{}^2 = \lambda^2 - (c_1 + a)^2, \end{array}\right\}$$

bundan $c_1 = 0, c_2 = \sqrt{\lambda^2 - a^2}$. Shuning uchun, $y = \sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - a^2}$ va $y' = -\frac{x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}$.

U holda (1) shartdan quyidagi natijaga kelamiz:

$$l = \int_{-a}^{a} \frac{\lambda dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \lambda \arcsin\frac{x}{\lambda}\Big|_{x=-a}^{x=a} = 2\lambda \arcsin\frac{a}{\lambda}$$

yoki $\frac{a}{\lambda} = \sin\frac{l}{2\lambda}$. $\lambda$ ga nisbatan transendent bo'lgan tenglamani yechib, ba'zi $\lambda = \lambda_0$ qiymatlarini topamiz va shundan so'ng $c_2 = \sqrt{\lambda_0{}^2 - a^2}$ ni topamiz. $\frac{a}{\lambda} = \sin\frac{l}{2\lambda}$ har doim yechimga ega. Haqiqatdan, $t = \frac{l}{2\lambda}$ deb olib, bu tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz: $\sin t = \frac{2a}{l}t$, va masala shartiga ko'ra, $\frac{2a}{l} = \alpha < 1$ ni olamiz. $y = \sin t$ funksiya $t = 0$ nuqtada $\frac{\pi}{4}$ urinma og'ishiga ega, $y = \alpha t$ funksiya esa kichik og'ishga ega. Bundan, bu funksiyalarning grafigi $O(0,0)$ nuqtadan boshqa hech bo'lmaganda yana bitta kesishish nuqtasiga ega bo'ladi.

**Izoperimetrik masalalarning o'zarolik qonuni.**

$$J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$$

funksionalning qo'shimcha

$$K[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')dx=const$$

shartdagi ekstremali, $K[y(x)]$ funksionalning $J[y(x)]=const$ shartidagi ekstremali bilan ustma-ust tushadi. Didon masalasining o'zarolik qonuni yordamida quyidagi natijaga kelamiz: berilgan yuzani chegaralovchi barcha yopiq chiziqlar ichida minimal uzunlikdagi chiziq, bu aylanadir.

Bu natijani bevosita variatsion masalaning parametric formasidan foydalanib, osonlikcha olishimiz mumkin.

Faraz qilaylik

$$\left.\begin{array}{l} x=x(t),[x(t_0)=x(t_1)], \\ y=y(t),[y(t_0)=y(t_1)], \end{array}\right\}, \qquad t_0\le t\le t_1,$$

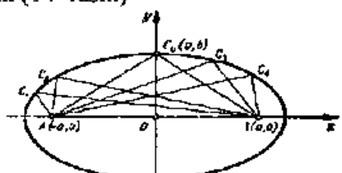
ixtiyoriy yopiq chiziqlarning tenglamasi berilgan bo'lsin. Masala quyidagi $\int(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}dx$ funksionalni $\int(x\dot{y}-\dot{x}y)dx=C$ shartga ko'ra ekstremumni topishga keltiriladi.

$$F=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}+\lambda x\dot{y}-\dot{x}y.$$

funksiyani kiritamiz, bunda ekstremum beruvchi egri chiziq uchun egrilik *(кривизна)* $\frac{1}{r}$ doimiy $\frac{1}{r}=\lambda$ bo'ladi. Demak, biz izlayotgan ekstremal – aylana.

**Misol 2 .** Quyidagi fikrlar to'g'riligini ko'rsatish mumkin : 1) berilgan asosga hamda berilgan perimetrga ko'ra, eng katta yuzaga, teng yonli uchburchak ega bo'ladi: 2) berilgan yuza hamda berilgan asosga ko'ra teng yonli uchburchak eng kichik perimetrga ega bo'ladi.

**Yechish.** 1) Fokuslari qaralayotgan uchburchak asoslarining uchlari bo'lgan ellipsni ko'raylik (14- rasm)




14- rasm

Ellipsning xossasiga ko'ra, hamma $ACB$ uchburchaklar bir xil perimetrga ega. Ravshanki, yuzasi eng katta bo'lgan uchburchak, bu eng katta balandlikga ega bo'lgani hisoblanadi. Bu hol qachonki, uchburchakning uchlari ellipsning $C_1$ uchi bilan ustma-ust tushsa. $AC_0B$ uchburchak bu holda teng yonlidir.

*2)* O'zarolik ***(взаимности)*** qonuniga ko'ra berilgan yuzada eng kichik perimetr va berilgan asosga ko'ra, teng yonli uchburchak ega bo'ladi.

**Misol 3.** $J[y]=\int_0^\pi y'^2(x)dx$ funksionalning $\int_0^\pi y^2(x)dx=1$, $y(0)=y(\pi)=0$ shartlar ostida minimumi topilsin.

**Yechish.** Yordamchi funksional

$$L[y]=\int_0^\pi (y'^2+\lambda y^2)dx$$

ni tuzamiz va buning uchun Eyler tenglamasini yozamiz

$$2\lambda y-\frac{d}{dx}(2y')=0 \text{ yoki } y''-\lambda y=0 \tag{4}$$

Tavsifiy tenglamasi $r^2-\lambda=0$ yoki $r_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda}$ bo'ladi. Ma'lumki, $\lambda<0$ bo'lishi lo'zim. Aks holda, agar $\lambda>0$ bo'lsin desak, unda (9) ning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda $y=c_1e^{\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$ bo'ladi va $y(0)=y(\pi)=0$, chegaraviy shartlarni faqat $c_1=c_2=0$ bo'lgandagina qanoatlantiradi, yani $y(x)\equiv 0$ da bajariladi. Biroq, bu holda $\int_0^\pi y^2(x)dx=1$ sharti bajarilmaydi. Shuningdek, $\lambda=0$ bo'lgan holda ham chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi (4) Eyler tenglamasining yechimi $y(x)\equiv 0$ bo'ladi. Shu sababli, $\lambda<0$ deb hisoblab, $r_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda}$ ni topamiz va (4) tenglamaning umumiy yechimi

$$y=c_1\sin\sqrt{-\lambda}x+c_2\cos\sqrt{-\lambda}x$$

ko'rinishda bo'ladi. $y(0)=0$ shart $c_2=0$ ni beradi, $y(\pi)=0$ shart esa $-\lambda=k^2$, (k=1, 2, ...) ni beradi. Demak, $y=c_1\sin kx$ bu yerda $c_1$ hozircha aniqlanmagan. $\int_0^\pi y^2(x)dx=1$ shartlaridan foydalanib,

$$\int_0^\pi c_1^2\sin^2 kxdx=1$$

ni olamiz, bu yerdan, $c_1=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Demak, $y(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx$ bo'ladi. Ammo, $y(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx$ ekstremallar o'rtasida (0,0) va ($\pi$,0) nuqtalardan o'tuvchi Yakobi shartini qanoatlantiruvchi faqat 2 ta ekstremallar mavjud, ular aynan $y(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$ ekstremallar bo'ladi. Bu ekstremallarda

$$J[y]=\int_0^\pi y'^2(x)dx=\int_0^\pi\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=1$$

bo'ladi.

**Misol 4.** (Kelvin masalasi ). Faraz qilaylik, $XOY$ tekislik $\mu(x,y)$ uzluksiz zichlikka ega bo'lgan massa bilan qoplangan hamda tekislikda bo'lakli-silliq $C$ egri chiziq va unda ikkita $P_1$ va $P_2$ nuqtalar berilgan bo'lsin. $P_1$ va $P_2$ nuqtalarni tutashtiruvchi barcha $l$ uzunlikdagi egri chiziqlar orasidan shundayin topish kerakki, qaysiki, u $C$ egri chiziqdagi $P_1P_2$ yoy bilan birgalikda maksimal massaga ega bo'lgan $D$ sohani chegaralaydi. Bu yerda $P_1$ va $P_2$ nuqtalar ustma – ust tushishi ham mumkin.

**Yechish.** Quyidagi funksiyani

$$V(x,y)=\int \mu(x,y)dx$$

kiritamiz. U holda Grin formulasiga ko'ra,

$$V(x,y)=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy=\iint\limits_D \frac{\partial V}{\partial x}dxdy=\oint\limits_\Gamma Vdy\,,$$

bo'ladi, bu yerda $\Gamma$ - $L$ egri chiziq va berilgan $C$ egri chiziqdagi $P_1P_2$ sohadan iborat kontur. Oxirgi soha bo'yicha olingan integral ma'lum qiymatga ega bo'ladi, biz uni $K$ bilan belgilaymiz. Shu sababli $L$ egri chiziqni parametrik

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t),\\ y&=y(t),\end{aligned}\right\}, \quad t_0\le t\le t_1,$$

ko'rinishida berilgan, deb hisoblab, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy=\int_{t_0}^{t_1} V(x,y)\,\dot y dx+K\,.$$

Shunday qilib, masala quyidagi

$$J_L=\int_{t_0}^{t_1} V(x,y)\,\dot y\,dx$$

funksionalni

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt=l$$

shart ostida maksimumini topishga keltirildi. Yordamchi funksiyani kiritamiz

$$F=V\dot y+\lambda\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}$$

va Eyler tenglamasining Veyershtrass ko'rinishidan foydalanib,

$$F_{x\dot y}=\frac{\partial V}{\partial x},\quad F_{\dot x y}=0,\quad F_1=\frac{F_{\dot x\dot x}}{\dot y^2}=\frac{\lambda}{(\dot x^2+\dot y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ga ega bo'lamiz, qaysiki, Eyler tenglamasining Veyershtrass ko'rinishi

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial x},$$

bo'ladi, yoki $V(x,y)$ funksiya uchun bor ifodani hisobga olsak,

$$\frac{1}{r}=\frac{\partial\mu(x,y)}{\lambda},$$

bo'ladi. Bu yerda $r$ - izlanayotgan egri chiziqning egrilik radiusi.

Qachonki, $\mu(x,y)=const$ bo'lsa, izlanayotgan egri chiziqning egriligi o'zgarmas bo'ladi va bunda ekstremal aylanalar iborat bo'ladi. Ravshanki, ular $J_L$ funksionalga maksimum beradi.

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,...,y_n,y_1',y_2',...,y_n')dx \tag{5}$$

funksianalninng ekstremumini ,

$$\int_{x_0}^{x_1}G_i(x,y_1,y_2,...,y_n,y_1',y_2',...,y_n')dx=l_i\ ,\ (i=1,2,...,m). \tag{6}$$

izoperimetrik shartlar ostida topish talab etilgan variatsion masalalar **izoperimetrik masalalar**, deb ataladi, bu yerda $l_i$-o'zgarmaslar.

(5) funksionalning (6) shartlar ostida ekstremumini topish haqidagi izoperimetrik masala uchun asosiy zaruriy shartni olishda quyidagi yordamchi funksionalni tuzish kerak bo'ladi

$$\Phi[y]=\int_{x_0}^{x_1}(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_iG_i)dx,$$

bu yerda $\lambda_i$-o'zgarmaslar, va bu yordamchi funksional uchun Eyler tenglamasini yozamiz. $C_1,C_2,...,C_{2n}$ Eyler tenglamalar tizimining (sistema) umumiy yechimidagi ixtiyoriy o'zgarmaslar. $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ o'zgarmaslar quyidagi chegaraviy shartlardan

$$y_k(x_0)=y_{k0},y_k(x_1)=y_{k1},\quad (k=1,2,...,n),$$

va (6) izoperimetrik shartdan

$$\int_{x_0}^{x_1}G_idx=l_i\qquad (i=1,2,...,m)$$

aniqlanadi.

**Misol 5.** $J[y(x),z(x)]=\int_0^1(y'^2+z'^2-4xz'-4z)dx,\ y(0)=0,\qquad z(0)=0,\qquad y(1)=1,$ $z(1)=1$, funksionalning ekstremumi haqidagi izoperimetrik masalaning

$$\int_0^1(y'^2-xy'-z'^2)dx=2 \tag{7}$$

shart ostida ekstremali topilsin.

**Yechish.** Yordamchi funksional tuzamiz

$$\Phi=\int_0^1[y'^2+z'^2-4xz'-4z+\lambda(y'^2-xy'-z'^2)]dx$$

va uning uchun Eyler tenglamalar tizimini yozamiz

$$-\frac{d}{dx}(2y'+2\lambda y'-\lambda x)=0,$$

$$-4-\frac{d}{dx}(2z'-4x-2\lambda z')=0.$$

uni yechib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$y(x)=\frac{\lambda x^2+2C_1x}{4(1+\lambda)}+C_2,$$

$$z(x)=\frac{C_3x}{2(1-\lambda)}+C_4.$$

Chegaraviy shartlardan quyidagilarni aniqlaymiz: $C_1=\frac{3\lambda+4}{2}$, $C_2=0$, $C_3=2(1-\lambda)$, $C_4=0$, shuning uchun ekstremallar

$$\begin{cases} y(x)=\dfrac{\lambda x^2+(3\lambda+4)x}{4(1+\lambda)}, \\ z(x)=x, \end{cases}$$

dan iborat bo'ladi. $\lambda$ ni topish uchun (7) izoperemetrik shartdan foydalanamiz. Shuningdek, $y'(x)=\frac{2\lambda x+3\lambda+4}{4(1+\lambda)}$, $z'(x)=1$, u holda quyidagini olamiz

$$\int_0^1\left[\frac{(2\lambda x+3\lambda+4)^2}{16(1+\lambda)^2}-\frac{(2\lambda x+3\lambda+4)x}{4(1+\lambda)}-1\right]dx=2.$$

Bundan oddiy, ammo uzun hisosoblashlardan so'ng, $\lambda$ ni aniqlash uchun quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz

$$\frac{1}{3}(23\lambda^2+46\lambda+24)=48(\lambda^2+2\lambda+1).$$

Bu yerdan $\lambda_1=-\frac{10}{11}$ va $\lambda_2=-\frac{12}{11}$ ni topamiz. Topilgan $\lambda$ larni (7) ifodaga qo'yib, $\lambda_2=-\frac{12}{11}$ izoperemetrik shartni qanoatlantirmasligiga, $\lambda_1=-\frac{10}{11}$ esa qanoatlantirishiga ishonch hosil qilamiz. Qidiralayotgan ekstremal quiyidagi tenglamalardan aniqlanadi

$$\left.\begin{aligned} y(x)&=\frac{7x-5x^2}{2}, \\ z(x)&=x \end{aligned}\right\}$$

**Misol 6.** Aytaylik, uzunligi $l$ ga teng sterjen $(x_0,y_0)$ va $(x_1,y_1)$ nuqtalarga berkitilgan.Elastiklik nazariyasidan ma'lumki, deformatsiyalangan holatdagi sterjenning potensial energiyasi, uning egriligi kvadratidan sterjen bo'ylab olingan integraliga proporsional. Sterjenning uzunligi $(x_0,y_0)$, nuqtadan boshlanuvchi erkli o'zgaruvchi deb $s$ ni qabul qilamiz. Uni $OX$ o'qi bilan sterjenga o'tkazilgan urinnma orqali hosil bo'lgan burchak $\theta(s)$ orqali belgilaymiz. Egrilik $\theta'(s)$ hosila bilan ifodalanadi va ekstremumi izlanayotgan integral quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$J = \int_0^l [\theta'(s)]^2 ds$$

Ma'lumki,

$$dx = \cos\theta ds, \qquad dy = \sin\theta ds,$$

demak, biz quyidagi bog'lanishlar tenglamasiga ega bo'lamiz

$$\int_0^l \cos\theta ds = x_1 - x_0, \qquad \int_0^l \sin\theta ds = y_1 - y_0. \tag{8}$$

Bundan tashqari sterjenning berkitiligi $\theta(s)$ funksiyaning berilganligiga teng kuchli: $s = 0$ va $s = l$ da

$$\theta(0) = a, \ \theta(l) = b. \tag{9}$$

Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$\Phi(\theta, \theta') = [\theta'(s)]^2 + \lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \sin\theta.$$

$\Phi$ funksiya erkin o'zgaruvchi $s$ ni o'z ichiga olmaydi, shuning uchun Eyler tenglamasining birinchi integralini darhol yozishimiz mumkin

$$\theta'^2 = C + \lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \sin\theta. \tag{10}$$

Yangi o'zgarmaslarni kiritamiz

$$h = C + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \qquad k^2 = \frac{2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{C + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}},$$

va $\theta$ ning o'rniga yangi o'zgaruvchini kiritamiz

$$\varphi = \frac{\theta - \theta_0}{2}, \qquad \text{bu yerda } \theta_0 = arctg\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Endi, (10) quyidagi ko'rinishga keltiriladi

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{h}}{2}\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi},$$

bundan

$$s = \frac{2}{\sqrt{h}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} + s_0$$

tenglikni olamiz.

$h, k^2, \theta_0$ va $s_0$ o'zgarmaslar (8) va (9) shartlardan aniqlanishi lozim. Sterjen nuqtalarning Dekart koordinatalari quyidagicha topiladi

$$dx = \cos\theta ds = \cos(2\varphi + \theta_0) ds, \qquad dy = \sin\theta ds = \sin(2\varphi + \theta_0) ds,$$

yoki

$$ds = \frac{2d\varphi}{\sqrt{h}\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

ekanligidan

$$dx=\frac{2\cos(2\varphi+\theta_0)}{\sqrt{h(1-k^2\sin^2\varphi)}}d\varphi, \qquad dx=\frac{2\sin(2\varphi+\theta_0)}{\sqrt{h(1-k^2\sin^2\varphi)}}d\varphi,$$

olamiz, bu yerda $x$ va $y$ lar integrallash yordamida aniqlanadi.

Quyidagi izoperimetrik masalalarda ekstremal topilsin:

166. *Og'irlik kuchi ta'siridagi bir jinsli og'ir ipning muvozanat holati haqidagi masala.*

Uzunligi $l$ bo'lgan, oxirlari berilgan $M_0(x_0,y_0)$ va $M_1(x_1,y_1)$ nuqtalarda yotuvchi barcha yassi chiziqlar orasidan og'irlik markazining ordinatasi minimal bo'ladigani topilsin.

167. $\int_0^1 y(x)dx=3$. shart ostida $J[y(x)]=\int_0^1 y'^2(x)dx,\ y(0)=1,\quad y(1)=6,$

168. $\int_0^1 y^2(x)dx=2$ shart ostida $J[y(x)]=\int_0^1 (x^2+y'^2(x))dx,\ y(0)=0,\quad y(1)=0,$

169. $\int_0^1 [y(x)-y'^2(x)]dx=\frac{1}{12}$ shart ostida $J[y(x)]=\int_0^1 y'^2dx,\ y(0)=0,\quad y(1)=\frac{1}{4}.$

**2.** Lagranjning $J[y_1,y_2,...,y_n]$ funksionalni $J$ funksional bog'liq bo'lgan funksiyalarga ayrim bog'lanishlar qo'yilgan holda, ekstremumini topish haqidagi masalasi ham shartli ekstremumli variatsion masala hisoblanadi.

Masala quyidagicha qo'yiladi:

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y_1,...,y_n,y_1',...,y_n')dx, \tag{11}$$

$$y_j(x_0)=y_{j0},\quad y_j(x_1)=y_{j1}\quad j=(1,...,n)$$

funksionalning

$$\varphi_i(x,y_1,...,y_n)=0\quad (i=1,...,m;m<n) \tag{12}$$

erkli hisoblangan shartlar ostida ekstermumi topilsin.

**Teorema.** (11) funksionalni (12) chi shartlar ostida ekstremumga erishtiruvchi $y_1,y_2,...,y_n$ funksiyalar, $\lambda_i(x)$ ko'paytuvchilar mos tanlanganda

$$J^*=\int_{x_0}^{x_1}\left[F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i\right]dx.$$

funksional uchun tuzilgan Eyler tenglamasini qanoatlantiradi.

Qisqalik uchun $F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i=\Phi(x,y_1,...,y_n)$, deb belgilaymiz. U holda $\lambda_i(x)$ va $y_i(x)$ funksiyalar Eyler tenglamasidan

$$\Phi_{y_j}-\frac{d}{dx}\Phi'_{y_j'}=0\qquad (j=1,...,n)$$

va

$$\varphi_i(x,y_1,...,y_n)=0\quad (i=1,...,m)$$

aniqlanadi. Agar funksionalning argumentlarini faqat $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalardangina emas, balki, $\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_m(x)$ funksiyalardan ham iborat deb hisoblansa, u holda $\varphi_i = 0$ tenglamani $J^*$ funksianal uchun Eyler tenglamasi, deb hisoblash mumkin,

**Misol 7.** $15x - 7y + z - 22 = 0$ sirtda yotuvchi $A(1,-1,0)$ va $B(2,1,-1)$ nuqtalar orasidagi eng qisqa masofa topilsin.

**Yechish.** Ma'lumki, $\varphi(x,y,z) = 0$ sirtda yotuvchi $A(x_0, y_0, z_0)$ va $B(x_1, y_1, z_1)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx,$$

formula yordamida aniqlanadi, bu yerda $y = y(x), z = z(x)$. $\varphi(x,y,z) = 0$ shart ostida $l$ ni minimumini topish kerak. Bizning holda

$$x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ \varphi(x,y,z) = 15x - 7y + z - 22.$$

Yordamchi funksionalni tuzamiz

$$J^* = \int_1^2 \left[\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22)\right] dx$$

va u uchun Eyler tenglamasini yozamiz

$$\lambda(x)\cdot(-7) - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0,$$

(13)

$$\lambda(x)\cdot 1 - \frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0; \qquad (14)$$

Bog'lanishlik tenglamasidan

$$15x - 7y + z - 22 = 0 \qquad (15)$$

foydalanib, (13),(14) tenglamalar sistemasini yechamiz. Qidirilayotgan $y = y(x)$ va $z = z(x)$ funksiyalar quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi

$$y(2) = 1,\ z(1) = 0,\ z(2) = -1. \qquad (16)$$

(14) tenglamagani 7 ga ko'paytirib (13) tenglama bilan qo'shsak,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y' + 7z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0$$

ni olamiz, bu yerda

$$\frac{y' + 7z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = C_1 \qquad (17)$$

(15) dan quyidagiga ega bo'lamiz

$$z' = 7y' - 15 \qquad (18)$$

$z'$ ning qiymatini (17) ga qo'yamiz va hosil bo'lgan differensial tenglamani yechib, $y(x)=\overset{\cup}{C_1}x+C_2$ ni topamiz. (16) chegaraviy shartlar $\overset{\cup}{C_1}=2, C_2=-3$ beradi, shuning uchun,

$$y(x)=2x-3. \tag{19}$$

(19) ni hisobga olib, (18) dan quyidagini olamiz

$$z(x)=1-x. \tag{20}$$

( ravshanki, (20) funksiya uchun chegaraviy shart bajariladi). (13) yoki (14) dan $\lambda(x)=0$ ni olamiz. Qidirilayotgan masofa

$$l=\int_1^2\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx=\sqrt{6}.$$

Bu natija ma'lum geometrik mulohazalardan kelib chiqadi.

$3^0$. ***Geodezik chiziqlar.*** Aytaylik, sirt vektorli tenglama bilan berilgan bo'lsin

$$r=r(u,v) \tag{21}$$

*Geodezik chiziq,* deb berilgan sirtda yotuvchi eng qisqa uzunlikka ega bo'lgan va sirtning berilgan 2 ta nuqtasini tutashtiruvchi chiziqga aytiladi.

Geodezik chiziq tenglamasini sirtda berilgan ikkita nuqta orasidagi eng qisqa masofani topish haqidagi variatsion masalaga mos kelgan Eyler tenglamasidan olish mumkin. $r=r(u,v)$ sirtda yotuvchi chiziq

$$u=u(t), v=v(t)$$

parametrik tenglama bilan berilishi mumkin. $t$ parametrning $t_0$ va $t_1$ qiymatlariga mos keluvchi nuqtalar orasidagi kesmaning uzunligi quyidagiga teng

$$J[u,v]=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\,dt, \tag{22}$$

bu yerda $E,F,G$ lar (21) sirt birinchi kvadratik formasining koeffisientlari, ya'ni

$$E=(\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial u}),\ F=(\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}),\ G=(\frac{\partial r}{\partial v},\frac{\partial r}{\partial v}),$$

bu yerda $(a,b)$ ifoda $a$ va $b$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi. (22) funksional uchun Eyler tenglamasi quyidagi ko'rininshga ega bo'ladi

$$\frac{E_u u'^2+2F_u u'v'+G_u v'^2}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}-\frac{d}{dt}\frac{2(Eu'+Fv')}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}=0,$$

$$\frac{E_v u'^2+2F_v u'v'+G_v v'^2}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}-\frac{d}{dt}\frac{Fu'+Gv'}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}=0,$$

**Misol 8.** Radiusi $R$ ga teng bo'lgan sferadagi berilgan ikkita nuqtani tutashtiruvchi barcha egri chiziqlar orasidan eng kichik uzunlikga ega bo'lgan gri chiziq (geodezik egri chiziq) topilsin.

**Yechish.** $\varphi$- sferadagi nuqtaning uzunligi , $\theta$- kengligi, $\varphi=\varphi(\theta)$- qidirilayotgan egri chiziq tenglamasi bo'lsin. Berilgan holatda quyidagiga ega bo'lamiz

$$r=r(\varphi,\theta)=x(\varphi,\theta)i+y(\varphi,\theta)j+z(\varphi,\theta)k.$$

Shuning uchun

$$E=(r_\varphi,r_\varphi)=R^2\sin^2\theta;\quad G=(r_\theta,r_\theta)=R^2;\quad F=(r_\theta,r_\varphi)=0.$$

Bu yerdan (22) formulaga ko'ra,

$$J[\varphi,\theta]=R\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2}=R\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{1+\sin^2\theta\,\varphi'^2(\theta)}d\theta$$

ega bo'lamiz. Integral ostidagi ifoda qidirilayotgan $\varphi(\theta)$ funksiyaga bog'liq emas, shuning uchun Eyler tenglamasi quyidagicha bo'ladi

$$\frac{d}{d\theta}f_{\varphi'}=0 \quad \text{bu yerda } f_{\varphi'}=\frac{\sin^2\theta\cdot\varphi'(\theta)}{\sqrt{1+\sin^2\theta\cdot\varphi'^2(\theta)}},$$

ya'ni

$$\frac{\sin^2\theta\cdot\varphi'(\theta)}{\sqrt{1+\sin^2\theta\cdot\varphi'^2(\theta)}}=C_1,$$

bu yerda

$$\varphi'(\theta)=\frac{C_1}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta-C_1^2}}=\frac{C_1}{\sin^2\theta\sqrt{1-\frac{C_1^2}{\sin\theta}}}=\frac{C_1}{\sin\theta\sqrt{(1-C_1^2)-C_1^2ctg^2\theta}}=$$

$$=-\frac{C_1d(ctg\theta)}{\sqrt{(1-C_1^2)-C_1^2ctg^2\theta}}\quad \text{ni}$$

integrallab, quyidagini olamiz

$$\varphi(\theta)=arr\cos\frac{C_1ctg\theta}{\sqrt{1-C_1^2}}+C_2,$$

yoki

$$\varphi(\theta)=\arccos(C\cdot ctg\theta)+C_2 \quad \text{bu yerda} \quad C=\frac{C_1}{\sqrt{1-C_1^2}}.$$

Bu yerdan

$$C\cdot ctg\theta=\cos[\varphi(\theta)-C_2],$$

yoki

$$ctg\theta=A\cos\varphi(\theta)+B\sin\varphi(\theta), \tag{23}$$

bu yerda $A=\frac{\cos C_2}{C}, B=\frac{\sin C_2}{C}$. (23) tenglikni har ikkala tomonini $R\sin\theta$ ga ko'paytirib, quyidagini olamiz

$$R\cos\theta = AR\cos\varphi\sin\theta + BR\sin\varphi\sin\theta$$

yoki, Dekart koordinatasiga o'tib,

$$z = Ax + By$$

ifodani olamiz.

Bu sfera markazidan o'tuvchi va sfera bilan eng katta aylanasi bo'yicha kesushuvchi tekislik tenglamasi. Shunday qilib, eng qisqa (geodezik) chiziq katta aylananing yoyi bo'ladi.

**Misol 9.** Aylaninsh tekislikdagi ixtiyoriy geodeziyaning har bir nuqtasida aylanish radiusining geodeziya va meridian orasidagi burchak sinusiga ko'paytmasi o'zgarmas kattalik bo'lishini ko'rsatamiz (Klero teoremasiga ko'ra).

**Yechish.** Aylaninsh sirtining silindrik koordinatalardagi tenglamasi quyidagi ko'rininshga ega bo'ladi

$$x = \rho\sin\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = f(\rho).$$

$E, F, G$ koeffitsientlarni topamiz $E = 1 + f'^2$, $F = 0, G = \rho^2$, aylaninsh sirtida yoy uzunligining differensiali $dS$

$$dS = \sqrt{\rho^2 + (1 + f'^2)\rho'^2}\,d\varphi$$

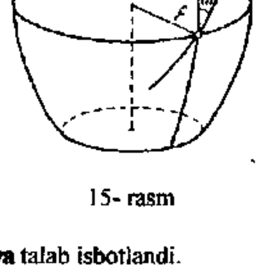
ko'rinishga ega bo'ladi.Aylaninsh sirtidagi geodezik chiziqlar

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\rho^2 + (1 + f_\rho'^2)\rho'^2}\,d\varphi$$

funksionalning ekstremali bo'ladi. Integral ostidagi funksiya $\varphi$ ga bog'liq bo'lmagani uchun, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + (1 + f_\rho'^2)\rho'^2}} = const.,$$

yoki $\rho^2 \dfrac{d\varphi}{dS} = const$. $\rho\dfrac{d\varphi}{dS} = \sin\omega$ (15- rasm)




15- rasm

$\rho\sin\omega = const$, **ega bo'ldik va** talab isbotlandi.

**170.** $x+y+z=0$ sirtda yotuvchi $A(1,0,-1)$ va $B(0,-1,1)$ nuqtalar orasidagi eng qisqa masofa topilsin.

**171.** $r=R$ aylanma silindrning geodezik chizig'i topilsin.

### 10 §. Qo'zg'aluvchan chegarali variatsion masala

1°. ***Qo'zg'aluvchan chegarali oddiy variatsion masala.*** $F=F(x,y,y')$ - o'zining argumentlari bo'yicha uch marta differensiallanuvchi funksiya va $XOY$ tekislikda ikkita egri chiziq

$$y=\varphi(x) \text{ va } \quad y=\psi(x) \tag{1}$$

berilgan bo'lsin, bu yerda $\varphi(x)\in C_1[a,b]$ va $\psi(x)\in C_1[a,b]$.

Oxirlari $A(x_0,y_0)$ va $B(x_1,y_1)$ berilgan (1) chiziqda yotuvchi $y=y(x)$ silliq egri chiziqda aniqlangan funksionalni qaraymiz

$$J[y]=\int_\gamma F(x,y,y')dx, \tag{2}$$

$y_0=\varphi(x_0)$, $y_1=\psi(x_1)$. (2) funksionalning ekstremumini topish talab qilinadi.

**Teorema.** $y=y(x)$ egri chiziq berilgan ikkita $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$ egri chiziqlarning ixtiyoriy ikkita nuqtasini tutashtiruvchi, $C_1$ sinfga tegishli barcha egri chiziqlar orasidagi

$$J[y]=\int_\gamma F(x,y,y')dx$$

funksionalga ekstremum beruvchi $\gamma: y=y(x)$ egri chiziq bo'lsin. U holda $\gamma$ egri chiziq extrimal bo'ladi va $\gamma$ egri chiziqning $A(x_0,y_0)$ va $B(x_1,y_1)$ uchlarida transversallik shartlari bajariladi

$$\left.\begin{aligned}\left[F+(\varphi'-y')F_{y'}\right]\Big|_{x=x_0}=0\\ \left[F+(\psi'-y')F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1}=0\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Shunday qilib, qo'zg'aluvchan chegarali masalani yechish uchun quyidagi bosqichlarni amalga oshirish kerak:

1) Mos Eyler tenglamasini yozish va yechish. Natijada ikkita $C_1, C_2$ parametrlarga bog'liq ekstremallar oilasini $y=f(x,C_1,C_2)$ topamiz.
2) (3) transversallik shartlari va
$$\left.\begin{aligned}f(x_0,C_1,C_2)=\varphi(x_0),\\ f(x_1,C_1,C_2)=\psi(x_0)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$
tenglamalardan $C_1,C_2,x_0,x_1$ o'zgarmaslarni aniqlaymiz.
3) (2) funksionalning ekstremumini hisoblaymiz.

**Misol 1.**

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)e^{\operatorname{arctg} y'}\sqrt{1+y'^2}\,dx, \qquad f(x,y)\neq 0,$$

funksional uchun transversallik shartlari topilsin.

**Yechish.** Ekstremalning chap tomoni $A(x_0,y_0)$ nuqtaga mahkamlangan bo'lsin, o'ng tomonidagi $B(x_1,y_1)$ nuqta esa $y=\varphi(x)$ egri chiziq bo'yicha joyini almashtirishi mumkin. U holda, quyidagini olamiz

$$\left[F+(\psi'-y')F_{y'}\right]_{x=x_1}=0.$$

*Bizning holimizda*

$$F=f(x,y)e^{\operatorname{arctg} y'}\sqrt{1+y'^2}, \quad F_{y'}=f(x,y)e^{\operatorname{arctg} y'}(1+y')/\sqrt{1+y'^2}.$$

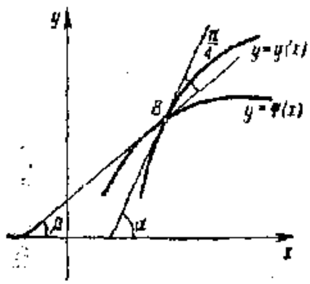
Transversal sharti

$$\left[f(x,y)e^{\operatorname{arctg} y'}\sqrt{1+y'^2}+(\psi'-y')f(x,y)e^{\operatorname{arctg} y'}(1+y')/\sqrt{1+y'^2}\right]_{x=x_1}=0.$$

*Bundan $f(x,y)\neq 0$ shartga ko'ra,*

$$(\psi'-y')\backslash(1+\psi'y')=-1 \qquad (5)$$

kelib chiqadi. Geometrik nuqtai nazardan (5) shart chegaraviy $B(x_1,y_1)$ nuqtaning $\pi\backslash 4$ burchak ostida sirpanishini bo'yicha degani bu $y=y(x)$ ekstremal $y=\psi(x)$ egri chiziqni kesib o`tishi kerak.




16-rasm

Haqiqatdan ham, (5) munosabatni shunday tasavvur qilishimiz mumkin: faraz qilaylik: *$y=y(x)$ egri chiziqda yotuvchi ekstremalning* $B(x_1,y_1)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma OX o'qini $\angle\alpha$ ostida kesib o'tadi, berilgan egri $y=\psi(x)$ chiziqga o'tkazilgan urinma esa OX o'qini $\angle\beta$ ostida kesib o'tadi (16-rasm). U holda $tg\alpha=y', tg\beta=\psi'$ va (5) formulaning chap tomoni $tg(\beta-\alpha)$ ni beradi; lekin $-1=tg(-\pi\backslash 4)$, shuning uchun $\beta-\alpha=-\pi\backslash 4$, bundan $\alpha=\beta+\pi\backslash 4$ kelib chiqadi. Shuni ko'rsatish talab qilingqn edi.

***Misol 2.*** *$y=x^2$ parabola va $x-y=5$ to'g'ri chiziq o'rasidagi masofa* topilsin.

**Yechish.** Masala ekstremalning chap oxiri $y=x^2$ egri chiziqda, o'ng oxiri esa $y=x-5$ to'g'ri chiziq bo'ylab joylashganlik sharti ostida

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

integralning ekstremal qiymatini topishga keltiriladi. Shunday qilib, bu holda $\varphi(x)=x^2$, $\psi(x)=x-5$ bo'ladi. Eyler tenglamasining umumiy yechimi $y=c_1x+c_2$ bo'lib, bunda $c_1$ va $c_2$ - aniqlanishi kerak bo'lgan ixtiyoriy o'zgarmaslar.

(3) transversallik sharti quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\left[\sqrt{1+y'^2}+(2x-y')y'\backslash\sqrt{1+y'^2}\right]_{x=x_0}=0,$$

$$\left[\sqrt{1+y'^2}+(1-y')y'\backslash\sqrt{1+y'^2}\right]_{x=x_1}=0,$$

bunda $y'=c_1$. (4) tenglama bizning holatimizda

$$c_1x_0+c_2=x_0^2,$$

$$cx_1+c_2=x_1-5,$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Demak, $C_1,C_2,x_0,x_1$ o'zgarmaslarni **aniqlash uchun** quyidagi tenglamalar tizimiga ega bo'lamiz:

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{1+c_1^2}+(2x_0-c_1)c_1\backslash\sqrt{1+c_1^2}=0,\\&\sqrt{1+c_1^2}+(1-c_1)c_1\backslash\sqrt{1+c_1^2}=0,\\&c_1x_0+c_2=x_0^2,\\&c_1x_1+c_2=x_1-5.\end{aligned}\right\}$$

Ularni **yechib,**

$$c_1=-1,\ c_2=\frac{3}{4},\ x_0=\frac{1}{2},\ x_1=\frac{23}{8},$$

larni topamiz. Demak, ekstremal tenglamasi $y=-x+\frac{3}{4}$ bo'lib, parabola bilan to'g'ri chiziq o'rasidagi masofa

$$J=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}}\sqrt{1-(-1)^2}\,dx=\sqrt{2}x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}}=\frac{19\sqrt{2}}{8}$$

ga teng bo'ladu.

172. $A(1,0)$ nuqtadan $4x^2+9y^2=36$ ellipsgacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

173. $A(-1,5)$ nuqtadan $y^2=x$ parabolagacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

174. $x^2+y^2=1$ aylana va $x+y=4$ to'g'ri chiziq orasidagi eng qisqa masofa topilsin.

175. $A(-1,3)$ nuqtadan $y=1-3x$ to'g'ri chiziqgacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

176. $I[y]=\int_{x_1}^{x_2}h(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$ funksional uchun, bu erda $h(x,y)\neq 0$ bo'lgan, chegaraviy

nuqtalarda transversallik shartlari $y'(x)=-\frac{2}{\varphi'(x)}$ va $y'(x)=-\frac{1}{\psi'(x)}$ ko`rinishga ega bo`lishligi isbotlansin, y'ani transversallik shartlari ortogonallik shartlariga keltiriladi.

2°. $$J[x,y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx \qquad (6)$$

***ko`rinishdagi funksionallar uchun qo'zg'aluvchan chegarali masala.*** (6) ko`rinishdagi funksionallarni ekstremumga tekshirishda $A(x_0,y_0,z_0)$, yoki $B(x_1,y_1,z_1)$ chegaraviy nuqtalardan kamida bittasi berilgan egri chiziqda harakatlanadi, deb hisoblaymiz. I[y,z] funksional ekstremumga faqat Eyler tenglamalar tizimining integral egri chiziqlarida erishishi mumkin

$$\left.\begin{aligned} F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0,\\ F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0.\end{aligned}\right\}$$

Aytaylik, $A(x_0,y_0,z_0)$ nuqta mahkamlangan bo'lsin, $B(x_1,y_1,z_1)$ **nuqta esa**

$$\left.\begin{aligned} y=\varphi(x),\\ z=\psi(x),\end{aligned}\right\}$$

tenglamalar bilan berilgan qandaydir egri chiziqlarda harakatlanayotgan bo`lsin. Bu holda, transversallik sharti

$$[F+(\varphi'-y')F_{y'}+(\psi'-z')F_{z'}]_{x=x_1}=0$$

ko`rinishga ega bo'ladi. Shu kabi transversallik sharti chap tomoni uchun ham (agar u ham qanaqadir

$$\left.\begin{aligned} y=\widetilde{\varphi}(x),\\ z=\widetilde{\psi}(x),\end{aligned}\right\}$$

egri chiziqlar bo`ylab harakatlansa)

$$[F+(\widetilde{\varphi}'-y')F_{y'}+(\widetilde{\psi}'-z')F_{z'}]_{x=x_0}=0$$

ko`rinishga ega bo'ladi.

**Misol 3.** $M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan

$$\left.\begin{aligned} y=mx+p\\ z=nx+q\end{aligned}\right\}$$

to`g`ri chiziqgacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

**Yechish**. Masala ekstremallarning o'ng oxirlari

$$\left.\begin{aligned} y=mx+p,\\ z=nx+q,\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

to'g'ri chiziqlarda joylashishi mumkinligi sharti ostida

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

integralining ekstremumini (minimumini) topishga keltiriladi, ya'ni bizning holatimizda $\varphi$ va $\psi$ funksiyalar mos ravishda

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)=mx+p,\\ \psi(x)=nx+q,\end{aligned}\right\}$$

ko'rinishga **ega bo'ladi. Bunga** mos kelgan **Eyler** tenglamalar tizimining umumiy **yechimi**

$$\left.\begin{aligned}y=c_1y+c_2,\\ y=c_3y+c_4,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $c_i$, (i=1,2,3,4), **aniqlanishi** lozim bo'lgan noma'lumlar. Transversal sharti (o'ng oxirida)

$$\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2}+(m-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+(n-z')\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right]_{x=x_1}=0.$$

ko'rinishni oladi, bu erda $y'=c_1$, $z'=c_3$ bo'lganligidan

$$1+mc_1+nc_3=0 \tag{9}$$

ni olamiz. (9) munosabat izlanayotgan (8) to'g'ri chiziqni berilgan (7) to'g'ri chiziqqa perpendikulyarlik shartini ifodalaydi. Izlanayotgan (8) to'g'ri chiziqni $M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o'tishligidan

$$\left.\begin{aligned}y_0=c_1y_0+c_2,\\ z_0=c_3z_0+c_4,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

hamda, o'ng tomoni (7) to'g'ri chiziqda joylashishidan foydalanib,

$$\left.\begin{aligned}c_1x_1+c_2=mx_1+p_1\\ c_3x_1+c_4=nx_1+q\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ega bo'lamiz. Endi, (9),(10) va (11) tenglamalardan $c_1c_2c_3c_4$ va $x_1$ ($x_0,y_0,z_0$,m,n,p,q-berilgan sonlar) larni aniqlash kerak. berilgan**integralni** topish uchun $x_1$, $c_1$ va $c_3$ni bilish kifoya. Quyidagiga egamiz

$$x_1=\frac{x_0+m(y_0-p)+n(z_0-q)}{1+n^2+m^2},\qquad c_1=\frac{mx_0+mn(z_0-q)-(1+n)(y_{0-p})}{n(y_0-p)+n(z_0-q)-(m+n^2)x_0},$$

$$c_3=\frac{nx_0+mn(y_0-p)-(1+m^2)(z_0-q)}{m(y_0-p)+n(z_0-q)-(m^2+n^2)x_0}.$$

Bularni olib borib (14) ga qo'ysak, quyidagi natijaga

$$h=\min J[y,z]=\sqrt{x_0^2+(y_0-p)^2+(z_0-q)^2-\frac{\left[x_0+m(y_0-p)+nz_0-q)\right]^2}{1+n^2+m^2}}$$

erishamiz. Agar $A(x_0,y_0,z_0)$ chegaraviy nuqta qo'zg'almas bo'lib, boshqa $B(x_1,y_1,z_1)$ chegaraviy nuqta qanaqadir $z=\varphi(x,y)$ sirtda harakatlansa, u holda transversallik sharti quyidagicha bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned}\left[F-y'F_{y'}+(\varphi_x'-z')F_{z'}\right]_{x=x_1}=0,\\ \left[F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y\right]_{x=x_1}=0.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Umuman olganda (12) shart $y=\varphi(x,y)$ tenglama bilan birgalikda Eyler tenglamalar tizimining umumiy yechimidan ikki o'zgarmasni aniqlash imkonini beradi (boshqa ikki o'zgarmas esa ekstremalni qo'zg'almas $A(x_0,y_0,z_0)$ nuqtasidan o'tishlik sharti orqali aniqlanadi). Agar qo'zg'aluvchi $A(x_0,y_0,z_0)$ nuqta, chegaraviy nuqta bo'lsa, u holda $x=x_0$ da (12) shartlarga o'xshash shartlarga ega bo'lamiz.

**Misol 4.** A(1,1,1) nuqtadan

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=1 \tag{13}$$

sferagacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

**Yechish.** Masala

$$J[y,z]=\int_{x_1}^{1}\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}dx \tag{14}$$

funksional ekstremumini tekshirishga keltiriladi. Bunda $B(x_1,y_1,z_1)$ nuqta (13) sferada joylashgan bo'lishi kerak. (14) funksionalning ekstremallari

$$\left.\begin{aligned} y&=c_1x+c_2,\\ z&=c_3x+c_4,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

to'g'ri chiziqlar hisoblanadi. (15) ekstremallarni A(1,1,1) nuqtadan o'tishlik shartidan

$$\left.\begin{aligned} 1&=c_1+c_2,\\ 1&=c_3+c_4,\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

kelib chiqadi. (12) transversallik shartlari (15) ni hisobga olgan holda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2}-\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-z'\right)\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right]_{x=x_1}=0,\\ &\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\frac{(-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]_{x=x_1}=0,\end{aligned}\right\}$$

Endi murakkab bo'lmagan ma'lum almashtirishlardan so'ng

$$\left.\begin{aligned} z_1-c_3x_1&=0\\ c_1z_1-c_3y_1&=0\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ega bo'lamiz, bu erda $x_1,y_1,z_1$ lar izlanayotgan B nuqtaning koordinatorlari. (15) ekstremalni $B(x_1,y_1,z_1)$ nuqtadan o'tishlik shartidan

$$\left.\begin{aligned} y_1&=c_1x_1+c_2\\ z_1&=c_3x_1+c_4\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

kelib chiqadi. (16),(17) va (18) dan

$$c_1=1,\ c_2=0,\quad c_3=1,\ c_4=0$$

larni topamiz, u holda ekstremal tenglamasi

$$\left.\begin{aligned} y &= x, \\ z &= x, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bilamizki, $B(x_1, y_1, z_1)$ nuqta (13) sferada yotishi kerak, u holda (19) ifodani hisobga olib, $x_1^2 + x_1^2 + x_1^2 = 1$ ni olamiz, ya'ni $x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ni topamiz.

Shunday qilib, quyidagi ikki $B_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ va $B_1(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ nuqtalarga ega bo'lamiz. Geometrik nuqtai nazardan, $A$ va $B_1$ nuqtalarni tutashtiruvchi (19) ekstremal (14) funksionalga

$$J_{min} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \sqrt{1+1+1}\, dx = \sqrt{3} - 1$$

ga teng bo'lgan minimum berishligini ko'rish qiyin emas. $A$ va $B_2$ nuqtalarni tutashtiruvchi (19) ekstremal esa (14) funksionalga maxsimum beradi, ya'ni

$$J_{max} = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \sqrt{1+1+1}\, dx = \sqrt{3} + 1.$$

**Eslatma 1.** (17) transversallik shartini keltirib chiqarishda biz $\varphi(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, deb oldik, lekin (17) transversallik sharti $\varphi(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ deb olinsa ham, saqlqnib qolishligini tekshirish qiyin emas.

**Eslatma 2.** Geometrik nuqtai nazardan (19) ekstremal $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sferaga ortogonal ekanligini ko'rish mumkin.

**Misol 5.** Aynan yuqoridagi (14) funksionalning ekstremumini topish masalasini qaraymiz, bunda faqat $A$ nuqta sifatida $O(0,0,0)$ sfera markazini olamiz.

**Yechish.** (14) funksionalning ekstremali (15) to'g'ri chiziq bo'ladi. Ekstremalni $O(0,0,0)$ nuqtadan o'tishlik shartidn darhol $C_2 = C_4 = 0$ ni olamiz.

Transversallik sharti oldingi ko'rinishda bo'ladi

$$\left.\begin{aligned} z_1 - c_3 x_1 &= 0, \\ c_1 z_1 - c_3 y_1 &= 0, \end{aligned}\right\}, \tag{20}$$

qo'zg'aluvchan oxirlardagi shart esa

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= c_1 x_1, \\ z_1 &= c_3 x_1, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

bo'ladi. Va nihoyat,

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 \tag{22}$$

ga ega bo'lamiz. $C_1, C_3, x_1, y_1$ va $z_1$ noma'lumlarni aniqlash uchun erkin o'zgaruvchilari uchta bo'lgan (20), (21), (22) beshta munosabatga egamiz:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= c_1 x_1, \\ z_1 &= c_3 x_1, \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

(23) munosabatdan foydalanib,

$$x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1+C_1^2+C_3^2}}, \quad y_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1+C_1^2+C_3^2}}, \quad z_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1+C_1^2+C_3^2}},$$

noma'lumlarni topamiz, bu erda $C_1, C_3$ lar ixtiyoriy o'zgarmaslar. Bu erkinlik geometrik nuqtai nazardan tushunarli: $O(0,0,0)$ nuqtadan (13) sferagacha bo'lgan masofa ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha bir xil bo'ladi, (ya'ni $C_1, C_3$ larning ixtiyoriy qiymatlarida).

$J[y,z]$ funksionalning

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= c_1 x_1 \\ z_1 &= c_3 x_1 \end{aligned}\right\}$$

ekstremallardagi qiymati

$$J[y,z] = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+C_1^2+C_3^2}}} \sqrt{1+C_1^2+C_3^2}\,dx = 1$$

gat eng bo'ladi.

**Misol 6.** Agar $A(x_0, y_0, z_0)$ nuqta mahkamlangan bo'lib, $B(x_1, y_1, z_1)$ nuqta $z=\varphi(x,y)$ sirt ustida bo'lgand, quyidagi

$$J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\,dx \qquad (24)$$

funksional uchun transversallik sharti topilsin.

**Yechish.** Bu hol uchun transversallik sharti

$$\left.\begin{aligned} (1+\varphi_x' z')\big|_{x=x_1} &= 0, \\ (y'+\varphi_y' z')\big|_{x=x_1} &= 0, \end{aligned}\right\},$$

yoki

$$\frac{1}{\varphi_x'}\Big|_{x=x_1} = \frac{y'}{\varphi_y'}\Big|_{x=x_1} = \frac{z'}{-1}\Big|_{x=x_1}.$$

bo'ladi. Bu izlanayotgan ekstremalning $B(x_1, y_1, z_1)$ nuqtasidagi urinma vektori bilan $z=\varphi(x,y)$ sirtning shu nuqtasidagi $n\{\varphi_x', \varphi_y', -1\}$ normal vektoriga paralellik shartini ifodalaydi. Shunday qilib, (24) ko'rinishidagi funksional uchun transversallik sharti ortogonallik shartiga olib kelinar ekan.

177. Agar transversallik sharti barcha berilgan boshlang'ichlarda ortogonallik sharti

bilan ustma-ust tushsa, u holda integral ostidagi $F_1$ funksiya quyidagi ko'rinishga

$$F = f(x,y,z)\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)},$$

ega bo'lishi ko'rsatilsin. Bu erda $f(x,y,z)$, $x,y,z$ o'zgaruvchilar bo'yicha ixtiyoriy

differensiallanuvchi funksiyasi.

**178.** $M(0,0,3)$ nuqtadan $z = x^2 + y^2$ sirtgacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

**179.** $M(2,0,5)$ nuqtadan $z = x^2 + y^2$ sirtgacha bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

**180.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ va $x^2+y^2+z^2=4$ sirtlar orasidagi eng qisqa masofa topilsin.

**181.** $y(0)=z(0)=0$ va $B(x_1,y_1,z_1)$ nuqta $x=x_1$ tekislikda joylashganlik shartlari ostida

ushbu $J[y,z]=\int_0^{x_1}(y'^2+z'^2+2yz)dx$ funksional ekstremumga tekshirilsin.

## 11 §. Uzilishga ega bo`lgan masalalar. Bir tomonlama variatsiyalar

**1⁰.** ***Uzilishli masalalar.*** Agar $F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))$ funksiyaning hosilasi nolga aylanmasa

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx \tag{1}$$

funksionalning $y = y(x)$ ekstremali ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'ladi. Biroq, shunday variatsion masalalar uchraydiki, ekstremumga faqat bo'lakli silliq egri chiziqda erishiladi.

***a) Birinchi tur uzilishga ega bo`lgan masalalar.*** Joiz egri chiziqlar

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1, \tag{2}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi va c $(x_0<c<x_1)$ absissasi bilan qandaydir nuqtasida sinishga deb hisoblab, (1) funksionalning ekstremumini topish masalasini qaraymiz.

Bu sinish $F_{y'y'}=0$ bo`lgandadagina, yuz berishi mumkin. Sinish nuqtada ekstremal quyidagi

$$\left.\begin{aligned} &F_{y'}\big|_{x=c-0}-F_{y'}\big|_{x=c+0}=0,\\ &(F-y'F_{y'})\big|_{x=c+0}-(F-y'F_{y'})\big|_{x=c+0}=0,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Veyershtrass-Erdman shartini qanoatlantirishi kerak. Qidirilayotgan ekstremalning uzluksizlik sharti bilan birgalikda sinish nuqtalari koordinatalarini aniqlashga yo'l ochib beradi. Ekstremal $[x_0,c]$ va $[c,x_1]$ kesmalarning har birida Eyler tenglamasini qanoatlantirishi kerak, ya'ni 2-tartibli differensial tenglamani qanoatlantirishi kerak. Bu ikkita tenglamani yechish natijasida biz 4 ta ixtiyoriy o'zgarmasga ega bo'lamiz. Umuman aytganda, ular (2) chegaraviy shartlardan va sinish nuqtasida (3) shartlar asosida topiladi.

**Misol 1.** $J[y]=\int_0^a (y'^2-y^2)dx$ funksionalning siniq ekstremali (agar ular mavjud bo'lsa) topilsin.

**Yechish.** Sinish nuqtasida $F_{y'}|_{x=c-0}=F_{y'}|_{x=c+0}$, $(0<c<a)$ bajarilishi kerak bo'lgan, (3) shartdan birinchisini yozamiz. Bu holda u $y'(c-0)=y'(c+0)$ ko'rinishga ega bo'ladi, bu esa $y'(x)$ hosilani $x=c$ nuqtada uzluksizligini bildiradi. Demak, sinish nuqtasi yo'q. Buni berilgan holatda doimo $F_{y'y'}=2>0$ ekanligidan ko'rish mumkin. Shuning uchun, qaralayotgan masalada ekstremumga faqat silliq egri chiziqlarda erishiladi.

**Misol 2.** $J[y]=\int_0^2 (y'^4-6y'^2)dx$, $y(0)=y(2)=0$ funksionalning $y'$, $x=c$ absissaga javob beruvchi bitta uzilish nuqtaga ega bo'lgan holda siniq ekstremali topilsin.

**Yechish.** Berilgan holatda $F_{y'y'}=12y'^2-12$ nolga aylanishi mumkin va shuning uchun ekstremalning sinish nuqtalari bo'lishi mumkin. Integral ostidagi funksiya faqat $y'$ ga bog'liq bo'lganligi uchun quyidagi chiziq $y=c_1x+c_2$ ekstremal bo'ladi. $y=mx+n$ $(0\le x<c)$, $y_+=px+q$ $y_+=px+q$, $(c\le x<2)$, deb olamiz. Chegaraviy shartlardan $n=0$, $q=-2p$ larni topamiz, unga ko'ra,

$$y=mx\,,\quad y_+=p(x-2).$$

Ekstremalning uzluksizlik shartidan

$$mc=p(c-2) \tag{4}$$

ni topamiz. Veyershtrass-Erdman shartini yozamiz

$$F_{y'}=4y'^3-12y'$$

$$F-y'F_{y'}=-3y'^4+6y'^2$$

$y'=m$, $y_+'=p$ ekanligidan

$$\left.\begin{aligned} 4m^3-12m&=4p^3-12p,\\ -3m^4+6m^2&=-3p^4+6p^2,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

yoki

$$\left.\begin{aligned} (m-p)(m^2+mp+p^2-3)&=0,\\ (m^2-p^2)(m^2+p^2-2)&=0,\end{aligned}\right\}$$

(5) ning 2-tenglamasi, darhol $m = p$ yoki $m = -p$ yoki $m^2 + p^2 - 2 = 0$ ni beradi, $m = p$ yechimni tashlab yuborish mumkin, bunda ekstremal uzluksiz hosilaga ega bo'ladi. (4)- shartdan $m = 0$ ekanini olamiz, ya'ni ekstremal - $OX$ o'qining biror kesmasi bo'ladi. Shunday qilib, (5) tizimning yechimi quyidagi tenglamalar tizimini yechishga keltiriladi

$$\begin{cases} m = -p, \\ m^2 + mp + p^2 = 3, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} m^2 + p^2 = 2, \\ m^2 + mp + p^2 = 3, \end{cases} \tag{7}$$

(6) ni yechib, $m = \sqrt{3}$, $n = -\sqrt{3}$ va $m = -\sqrt{3}$, $p = \sqrt{3}$, larni va (7) ning yechimi $m = p$ ni beradi, uni tashlab yuborish mumkin. Demak, $m = -p$ (5) uzluksizlik sharti $c = 1$ ni beradi.

Qidirilayotgan ekstremallar

$$y = \begin{cases} \sqrt{3}x, & 0 \le x < 1, \\ -\sqrt{3}(x-2), & 1 \le x \le 2, \end{cases} \quad y = \begin{cases} -\sqrt{3}x, & 0 \le x < 1, \\ -\sqrt{3}(x-2), & 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

bo'ladi.

**185.** $J[y] = \int_0^2 y'^2 (y'-1)^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(2) = 1$ funksional uchun burchak nuqtali ekstremali topilsin.

**186.** $J[y] = \int_0^4 (y'-1)^2 (y'+1)^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(4) = 2$ funksionalning minimumi haqidagi masalada bitta burchak nuqtali yechimi topilsin .

**187.** $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^3 + 2xy - y^2) dx$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ funksionalning ekstremumi masalasida burchak nuqtali yechim mavjudmi?

**188.** $J[y] = \int_{-1}^{1} y^2 (1 - y'^2) dx$, $y(-1) = 0$, $y(1) = 1$ funksionalning ekstremumi masalasida burchak nuqtali *yechimi* topilsin.

**189.** $J[y] = \int_{\mu_1}^{\mu_2} (y'^4 - 2y'^2) dx$ funksionalning minimumi haqidagi masalasining burchak nuqtali yechimi topilsin.

**190.** $J[y] = \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} \sin y' dx$ funksionalning ekstremumi masalasida uzluksiz hamda burchak nuqtali yechim topilsin.

**Eslatma.** Veyershtrass-Erdmanning (3) sharti quyidagi geometrik talqinga imkon beradi.

Figuratrisani quramiz, ya'ni $y'$ ning $Y = F(x, y, y')$ funksiyasini quramiz. U holda (3) shart, parametrlarning burchakli nuqtalarga javob beruvchi $x = c$, $y = c_1$ qiymatlarida figuratrisa $y_-' = y'(c-0)$ va $y_+' = y'(c+0)$ absissalar bilan umumiy urinmaga ega bo'lishi kerakligini bildiradi.

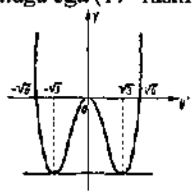
Bir vaqtning o'zida ekstremallarning sinishi mumkinligini yo'qqa chiqaruvchi $F_{y'y'} \neq 0$ shartning geometrik talqini kelib chiqadi. Haqiqatda, agar, masalan, $F_{y'y'} > 0$ bo'lsa, u holda figuratrisa qavariq bo'ladi va unga har xil nuqtalardan o'tkazilgan urinmalar ustma-ust tushmaydi. Shuning uchun bu holda ekstremal sinishga ega bo'lmaydi.

Biz yana funksionalning siniq ekstremallarini topish bilan shug'ullanamiz (shu paragrafdagi 2- misolga qarang).

$$J[y] = \int_0^2 (y'^4 - 6y'^2)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 0$$

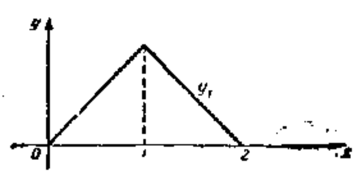
ga egamiz.

Ekstremallar to'g'ri chiziqdan iborat. $Y = y'^4 - 6y'^2$ figuratrissa, bu holda $(x, y)$ nuqtalarga bog'liq bo'lmaydi. Shuning uchun abscissaning $y' = \pm\sqrt{3}$ nuqtalarida bilan umumiy urinmaga ega (17 -rasm).



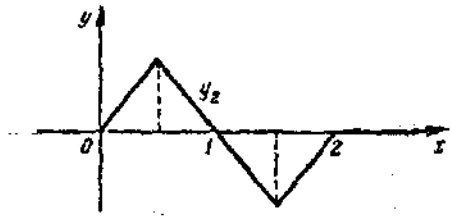

17 -rasm

Agar siniq ekstremallar sifatida OX o'qi bilan $\pm\frac{\pi}{3}$ burchak tashkil qiluvchi siniq *chiziqlarning bo'lagi olinsa, u holda Veyershtrass-Erdman sharti bajariladi.* $y_1$ siniq chiziqda bitta burchak nuqtasi bilan funksional $J[y_1] = -18$ qiymatga ega bo'ladi (18- rasm).



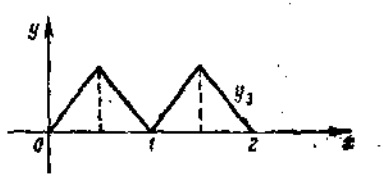

18 –rasm

So'ngra $y_2$ siniq chiziqda ikkita burchak nuqtasi bilan funksional shu qiymatga ega bo'ladi (19-rasm),




19-rasm

$y_3$ siniq chiziqda uchta burchak nuqtasi bilan funksional shu qiymatga ega bo'ladi (20 -rasm) va hokazo.




20 –rasm

***б) Ikkinchi tur uzilishga ega bo`lgan masalalar.*** **Integral ostidagi** funksiyasi uzilishga ega bo`lgan

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx,$$

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1 \qquad (8)$$

funksionalning ekstremumini topish masalasiga ikkinchi tur uzilishga ega bo`lgan masalalar, deb ataladi.

Masalan, $F(x,y,y')$ funksiya $y=\Phi(x)$ chiziq bo`ylab uzilishga ega bo'lsin va $F(x,y,y')$ $y=\Phi(x)$ ning bir tomonida $F_1(x,y,y')$ funksiyaga, boshqa tomonida esa $F_2(x,y,y')$ funksiyaga teng bo'lsin. Siniq ekstremallar mavjud bo'lgan holda, oxirgi hol uzilish chizig'ida umumiy (c, Ф(c)) nuqtaga ega bo'lgan $y=y_1(x)$ va $y=y_2(x)$ ekstremallar bo`laklaridan tashkil topadi. Siniq ekstremallarni aniqlash uchun umumiy yechimi 4 ta ixtiyoriy $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ o`zgarmaslarni o'z ichiga oluvchi Eylerning ikkita differensial tenglamasini olamiz. Bu o`zgarmaslarni hamda ekstremallarning $y=\Phi(x)$ egri chiziqni absissa bilan kesishish nuqtalarini topish uchun: 1) (8) ikkita chegaraviy shartga, 2) ekstremallar oxirlarining ordinatasito`qnashuv nuqtasi $y=\Phi(x)$

egri chiziq ordinatasiga teng bo`lishligini talab qiluvchi ikkita shartga, va nihoyat, 3) to`qnashishdagi shart

$$F_1+(\Phi'-y')F_{1y'}\big|_{x=c-0}=F_2+(\Phi'-y')F_{2y'}\big|_{x=c+0}, \tag{9}$$

ga egamiz. Bu shartlar, umuman aytganda, siniq ekstremallarni topish uchun yetarli.

**Misol 3.** (Yorug'lik nurining sinishi haqidagi masala). I muhitda yorug`lik nuri $v_1$ doimiy tezlik bilan tarqaladi, II muhitda esa yorug`lik nuri $v_2$ doimiy tezlik bilan tarqaladi. 1-muhit 2-muhitdan y=Φ(x) egri chiziq bilan ajralgan.

*I muhitning A nuqtasidan II muhitning B nuqtasiga tushuvchi nurning,* nur bu yo`lni eng qisqa vaqt oralig'ida bosib o`tishini bilgan holda, sinish qonunini keltirib chiqarilsin.

**Yechish.** Masala

$$J=\int_a^c\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1}dx+\int_c^b\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_2}dx \tag{10}$$

integralning minimumini topishga keltiriladi, chunki (10) ifodadagi birinchi va ikkinchi integrallar nurni A nuqtadan ajralish chizig'igacha va ajralish chizig'idan B nuqtagacha borishi uchun kerak bo'lgan vaqtni beradi. Shunday qilib, ikkinchi tur uzilishga ega bo'lgan masalaga kelamiz, bu yerda

$$F_1=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1};\qquad F_2=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_2}.$$

Ekstremallarning bo'laklarini topish

$$\int\sqrt{1-y'^2}\,dx$$

funksionalning ekstremalini topishga keltiriladi, ma'lumki, bu funksionalning ekstremali to`g`ri chiziqdan iborat.

Demak, $y_1=mx+n$ $y_2=px+q$ o`rinli. (11) shartni yozamiz:

$$F_1-y'_1\frac{\partial F}{\partial y'_1}=\frac{\sqrt{1-y'^2}}{v_1}-\frac{y'^2}{v_1\sqrt{1-y'^2}}=\frac{1}{v_1\sqrt{1-y'^2}};$$

$$F_2-y'_2\frac{\partial F}{\partial y'_2}=\frac{1}{v_2\sqrt{1-y'^2}},$$

**ga ega bo'lamiz. Bu** ifodalarni (9) ga qo`yib,

$$\frac{1+\Phi' y'_1}{v_1\sqrt{1-y'^2}}=\frac{1+\Phi' y'_2}{v_2\sqrt{1-y'^2}} \tag{11}$$

ni topamiz. $\gamma$ OX o`qi bilan ajralish chizig'ining c nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning tashkil qilgan burchagi, $\alpha$ - bilan chap nurning OX o`qidagi burchagi, $\beta$- o'ng nurning OX o'qidagi burchagi bo'lsin. Unda $\Phi' = \text{tg}\,\gamma$, $y'_1=\text{tg}\,\alpha$, $y'_2=\text{tg}\,\beta$ va (11) shart

$$\frac{1+\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}{v_1\sqrt{1+\text{tg}\,\alpha^2}}=\frac{1+\text{tg}\,\beta\,\text{tg}\,\gamma}{v_2\sqrt{1+\text{tg}\,\beta^2}},$$

yoki

$$\frac{\cos(\gamma-\alpha)}{v_1}=\frac{\cos(\gamma-\beta)}{v_2}$$

ko'rinishga ega bo`ladi. Bu yerda $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ nurlar obilan ajralish chizig'iga o'tkazilgan urinma orasidagi burchaklar. Ularngni o`rniga ajralish chizig'i va tushuvchi va sinuvchi nurlarning normallari orasidagi $\varphi$ va $\theta$ burchaklarni kiritib,

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}=\frac{v_1}{v_2}=\text{const}$$

ni olamiz, ya'ni bu bizga ma'lum bo'lgan yorug`lik nurining sinishi qonunini.

$2^0$**. *Bir tomonlama variatsiyalar.*** Bu erda

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx,$$

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1$$

funksionalning

$$y-\varphi(x)\ge 0 \text{ yoki } (y-\varphi(x)\le 0) \tag{12}$$

shartlar asosida ekstremumga tekshiriladi (chegaralovchi shartlar bundan ham murakkab ko'rinishda bo'lishi mumkin). Bu holda, izlanayotgan ekstremallar (12) sohada yotuvchi ekstremallarning bo`laklaridan iborat bo'lishi mumkin va bu sohada bo`laklarning chegarasi $y=\varphi(x)$ bo'ladi. Ko`rsatilgan bo`laklarning kesishish nuqtasida izlanayotgan ekstremal silliq bo`lishi mumkin, lekin burchakli nuqtalarga ega bo`lishi ham mumkin. Kesishish nuqtasidagi shart quyidagicha bo`ladi:

$$[F(x,y,y')-F(x,y,\varphi')-(\varphi'-y')F_{y'}(x,y,y')]\Big|_{x=\bar{x}}=0.$$

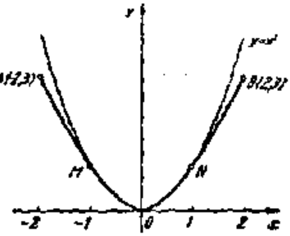
Agar $F_{y'y'}\ne 0$ bo`lsa, u holda ekstremal $M(\bar{x},\bar{y})$ kesishish nuqtasida sohaning $y=\varphi(x)$ chegarasini kesadi.

**Misol 4.** $y\le x^2$ sohada joylashgan $A(-2,3)$ nuqtadan $B(2,3)$ nuqtagacha bo'lgan eng qisqa yolni toping.

**Yechish.** Masala $y\le x^2$, $y(-2)=3$, $y(2)=3$, shartlar ostida

$$J[y]=\int_{-2}^{2}\sqrt{1+y'^2(x)}dx \tag{13}$$

funksionalning ekstremumini topish masalasiga keltiriladi. (13) funksionalni ekstremali $y = C_1 + C_2 x$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Bu holda $F_{y'y'} = \frac{1}{[1+y'^2(x)]^{\frac{3}{2}}} \neq 0$ va qidiralayotgan ekstremal $y = x^2$ parabolaga o'tkazilgan $AM$ va $NB$ urinmalarning bo'laklaridan va parabolaning $MON$ bo'lagidan iborat bo'ladi (21- rasm).




21-rasm

Urinish nuqtalarining absissalarini $\bar{x}, -\bar{x}$ deb belgilaymiz. Urinish nuqtasida to'g'ri chiziqning ordinatasi va burchak koeffisienti hamda parabolaga o'tkazilgan urinmaning ordinatasi va burchak koeffisienti ustma-ust tushadi. Shuning uchun

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2\bar{x} &= \bar{x}^2, \\ C_2 &= 2\bar{x}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ga ega bo'lamiz. Boshqa tomondan, urinma $B(2,3)$ nuqtadan o'tishi kerak, shuning uchun,

$$C_1 + 2C_2 = 3 \tag{15}$$

bo'ladi. (14) va (15) dan $C_1, C_2$ larni yo'qotib, $\bar{x}^2 - 4\bar{x} + 3 = 0$ ni topamiz, bu erda $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = +3$. $\bar{x}$ ning ikkinchi qiymati to'g'ri kelmaydi. Demak, $\bar{x}_1 = 1$. Bu erdan $C_1 = -1$, $C_2 = 2$ larni topamiz. Izlanayotgan ekstremal (yagona)

$$y = \begin{cases} 2x-1, & agar \quad -2 \le x \le -1, \\ x^2, & agar \quad -1 \le x \le 1, \\ 2x-1, & agar \quad 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Tushunarliki, bu ekstremal (13) funksionalga minimum beradi.

**191.** Joiz egri chiziqlar $(x-5)^2+y^2=9$ aylana bilan chegaralangan doiraning ichidan o'tmaslik sharti ostida

$$J[y] = \int_0^{10} y'^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(10) = 0 .$$

funksionalga ekstremum beruvchi egri chiziq topilsin.

**192.** $A(a, y_0)$ va $B(b, y_1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqlar orasidan shundayini topingki, $y \ge 0$, $1 - y^2 y'^2 \ge 0$ shart ostida

$$J[y]=\int_a^b y\sqrt{1+y^2y'^2}\,dx$$

funksionalga ekstremum qiymat bersin.

## 12 §. Gamilton—Yakobi nazariyasi

### *1°. Eyler tenglamasining kanonik(gameltonlik) formasi*

$$J[y_1,y_2,...,y_n]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y_1,y_2,...,y_n,y_1',y_2',...,y_n')dx \tag{1}$$

Funksional uchun Eyler tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega

$$F_{y_k}-\frac{d}{dx}F_{y_k'}=0, \qquad (k=1,2,...,n). \tag{2}$$

Agar determinant

$$\begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} & \dots & F_{y_1'y_n'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \dots & F_{y_2'y_n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} & \dots & F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{3}$$

bo'lsa, u holda

$$F_{y_k'}=p_k, \qquad (k=1,2,...,n). \tag{4}$$

deb olamiz. (4) tenglamadan $y_k'$ ni $x,y_1,y_2,...,y_n,p_1,p_2,...,p_n$ lar orqali ifodalash mumkin:

$$y_k'=\varphi_k(x,y_1,y_2,...,y_n,p_1,p_2,...,p_n)$$

$$H=\left[-F(x,y_1,y_2,...,y_n,y_1',y_2',...,y_n')+\sum_{k=1}^{n}y_k'F_{y_k'}(x,y_1,y_2,...,y_n,y_1',y_2',...,y_n')\right]_{y_k'=\varphi_k}$$

tenglik bilan aniqlangan $x,y_1,y_2,...,y_n,p_1,p_2,...,p_n$ o'zgaruvchilarga bog'liq $H$ funksiyani (1) *funksionalning gamiltoniani*, deb ataladi.
Gamiltonian quyidagi munosabatlarni qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial H}{dy_k}=-\frac{dp_k}{dx}, \qquad \frac{\partial H}{dp_k}=-\frac{dy_k}{dx}, \qquad (k=1,2,...,n). \tag{5}$$

(5) tenglama (2) *Eyler tenglamasining kanonik*, yoki *gamiltonlik* tizimi deyiladi; $y_1,y_2,...,y_n,p_1,p_2,...,p_n$, o'zgaruvchilar *kanonik o'zgaruvchilar* deyiladi.

**Izoh 1.** (3) shart $J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$ funksional uchun $[x_1,x_2]$ da $F_{y'y'}\neq 0$ ni beradi.

**Izoh 2.** (4) tenglama $[x_1,x_2]$ kesmada $y_i'$ ga nisbatan echiladi, umuman olganda, bir qiymatli emas. Oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremaning shartlari bajarilganda (4) tenglamani lokal bir qiymatli echilishi mumkinligi o'rinli bo'ladi.

**Misol 1.**

$$J[y_1, y_2] = \int_0^{\pi}(2y_1y_2 - 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2)dx$$

funksional uchun Eylerning kanonik tenglamalar sistemasi tuzilsin.

**Yechish.** Bizning holimizda

$$F = F(x, y_1, y_2, y_1', y') = 2y_1y_2 - 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2.$$

Faraz qilamiz,

$$F_{y_1'} = p_1, \quad F_{y_2'} = p_2.$$

bo'lsin. Unda

$$p_1 = 2y_1', \quad p_2 = -2y_2'$$

ga teng bo'ladi. Bu yerda determenant

$$\begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Olingan munosabatlarni $y_1'$, $y_2'$ ga nisbatan yechib, quyidagini olamiz:

$$y_1' = \frac{p_1}{2}, \quad y_2' = -\frac{p_2}{2}.$$

Berilgan funksionalning gamiltonianini topamiz

$$H = (-F + y_1'F_{y_1'} + y_2'F_{y_2'})\Big|_{y_1' = \frac{p_1}{2}, y_2' = -\frac{p_2}{2}} =$$

$$(-2y_1y_2 + 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2)\Big|_{\substack{y_1' = \frac{p_1}{2} \\ y_2' = -\frac{p_2}{2}}} = 2y_1^2 - 2y_1y_2 + \frac{p_1^2}{4} - \frac{p_2^2}{4}.$$

(5) munosabatdan foydalanib, Eyler tenglamasining kanonik tizimini olamiz

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{p_1}{2}, & \dfrac{dy_2}{dx} = -\dfrac{p_2}{2}, \\ \dfrac{dp_1}{dx} = -4y_1 + 2y_2, & \dfrac{dp_2}{dx} = 2y_1. \end{cases}$$

Bu yerda $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $p_1 = p_1(x)$, $p_2 = p_2(x)$, lar $x$ ning noma'lum funksiyalari.

**Misol 2.**

$J[y_1, y_2] = \int y_1^2y_2^2(x^2 + y_1' + y_2')dx$ funksional uchun Eyler tenglamasining kanonik tizimi tuzilsin.

**Yechish.** Bu yerda:

$$F = F(x, y_1, y_2, y_1', y') = y_1^2y_2^2(x^2 + y_1' + y_2').$$

Xususiy hosilalarni topamiz

$$F_{y_1'} = y_1^{'2} y_2^{'2}, \quad F_{y_2'} = y_1^{'2} y_2^{'2}.$$

Faraz qilaylik,

$$p_1 = y_1^{'2} y_2^{'2}, \quad p_2 = y_1^{'2} y_2^{'2}.$$

bo'lsin. Bu munosabatlar noma'lum $y_1$, $y_2$ funksiyalarning hosilalariga bog'liq emas, shuning uchun, $y_1'$ va $y_2'$ larni $p_1$ va $p_2$ o'zgaruvchilar orqali ifodalab bo'lmaydi. Demak, bu funksional uchun gamiltonianni tuzish mumkin emas. Bu misolda (3) shart bajarilmaydi

$$\begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**Misol 3.**

$$J[y] = \int xyy'^3 dx$$

funksional uchun Eyler tenglamasining kanonik tizimi tuzilsin.

**Yechish.** Quyidagiga egamiz

$$F = F(x, y_1, y_2, y_1', y') = xyy'^3, \quad F_{y_1'} = 3xyy'^2.$$

Unga $p = 3xyy'^2$ ni qo'yamiz. Bundan

$$y' = -\sqrt{\frac{p}{3xy}}, \quad y' = \sqrt{\frac{p}{3xy}} \quad \text{chiqadi.}$$

Berilgan funksional ikkita gamiltonianga ega:

$$H_1 = (-F + y'F_{y'})\Big|_{y'=-\sqrt{\frac{p}{3xy}}} = 2xyy'^3\Big|_{y'=-\sqrt{\frac{p}{3xy}}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{p^3}{xy}},$$

$$H_2 = (-F + y'F_{y'})\Big|_{y'=\sqrt{\frac{p}{3xy}}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{p^3}{xy}}.$$

Unga mos ravishda Eyler tenglamasini ikkita kanonik tizimiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\partial H_1}{\partial p} = -\sqrt{\dfrac{p}{3xy}}, \\ \dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial y} = -\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{p^3}{3xy^3}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{p}{3xy}}, \\ \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{p^3}{3xy^3}}. \end{cases}$$

Quyidagi Funksionallar uchun Eyler tenglamasining kanonik tizimlari tuzilsin:

**193.** $J = \int xy\sqrt{y'}dx$.

**194.** $J = \int xyy'^2 dx$.

**195.** $J = \int \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + y'^2} dx$.

196. $J = \int\limits_{1}^{2} (y_1'^2 + y_2'^2 + y_1'^2)dx.$

197. $J = \int (x^2 + y_1 y_1'^2 + y_2 y_2'^2)dx.$

198. $J = \int (2xy_1 - y_1'^2 + \frac{y_2'^3}{3})dx.$

2°. ***Gamilton—Yakobi tenglamasi. Yakobi teoremasi.*** Agar $y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ larni noma'lum $x$ ning funksiyasi deb qarasak (7) Eyler tenglamasining kanonik tizimi

$$J = \int\limits_{x_1}^{x_2} [\sum_{k=1}^{n} p_k y_k' - H(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)]dx.$$

funksional uchun Eyler tenglamlar tizimidan iborat bo'ladi. Berilgan $J$ funksional quyidagi ko'rinishdagi

$$\frac{\partial W}{\partial x} + H(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{\partial W}{\partial y_1}, \frac{\partial W}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial y_n}) = 0.$$

*Gamilton—Yakobi tenglamasi,* deb ataluvchi birinchi tartibli xususiy hosilali tenglamaning yechimidan iborat.

**Teorema**(Yakobi). Aytaylik, $W$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial C_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial C_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial C_n} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial C_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial C_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial C_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y_n \partial C_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial y_n \partial C_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial y_n \partial C_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

*shartni qanoatlantiruvchi Gamilton—Yakobi tenglamasini **([5]ga qarang )** to'liq integrali bo'lsin. U holda quyidagi tenglik*

$$\frac{\partial W}{\partial C_k} = B_k, \quad \frac{\partial W}{\partial y_k} = p_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

*Bu yerda $C_k$, va $B_k$—ixtiyoriy o'zgarmaslar, 2n ta ixtiyoriy o'zgarmaslarga bog'liq (7) kanonik tizimini yechimini beradi.*

**Misol 4.** Gamilton—Yakobi tenglamasining yechimi yordamida

$$J = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + y'^2}dx$$

funksionalning ekstremali topilsin.

**Yechish.** Gamilton—Yakobi tenglamasini olish uchun **ushbu** funksiyaning gamiltonianini topamiz. Biz quyidagiga egamiz

$$H = -\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}.$$

Gamilton—Yakobi tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega

$$\frac{\partial W}{\partial x}-\sqrt{x^2+y^2-(\frac{\partial W}{\partial x})^2}=0,$$

yoki

$$(\frac{\partial W}{\partial x})^2+(\frac{\partial W}{\partial y})^2=x^2+y^2. \qquad (6)$$

(6) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz

$$(\frac{\partial W}{\partial x})^2-x^2+(\frac{\partial W}{\partial y})^2-y^2=0$$

va o'zgaruvchilarni ajratish usulini qo'llaymiz. Ko'rinib turibdiki, agarki quyidagini talab qilsak,

$$(\frac{\partial W}{\partial x})^2-x^2=C, \quad (\frac{\partial W}{\partial y})^2-y^2=C.$$

Bu yerda $C$ —ixtiyoriy o'zgarmas, unda (8) tenglama qanoatlantiriladi. Bundan

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\sqrt{x^2-C}, \quad \frac{\partial W}{\partial y}=\sqrt{y^2+C}$$

larni topamiz. (8) tenglamaning to'la integrali quyidagicha bo'ladi:

$$W=\int\sqrt{x^2-C}dx+\int\sqrt{y^2+C}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-C}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-C}\right|+$$

$$+\frac{1}{2}y\sqrt{y^2+C}+\frac{C}{2}\ln\left|y+\sqrt{y^2+C}\right|+C_0.$$

bu yerda $C$ va $C_0$ –ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Berilgan funksionalning Eyler tenglamasining umumiy yechimini $\frac{\partial W}{\partial C}=\frac{A}{2}$ munosabatdan topamiz. Bu yerda $A$ —ixtiyoriy o'zgarmas. Quyidagiga egamiz:

$$\frac{x}{4\sqrt{x^2-C}}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-C}\right|+\frac{C}{4}\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-C})\sqrt{x^2-C}}+$$

$$\frac{1}{4}\quad\frac{1}{\sqrt{y^2+C}}+\frac{1}{2}\ln\left|y+\sqrt{y^2+C}\right|+\frac{C}{4}\frac{1}{(y+\sqrt{y^2+C})\sqrt{y^2+C}}=\frac{A}{2}.$$

Qiyin bo'lmagan soddalashtitirishlardan keyin quyidagilarni olamiz:

$$\ln\left|\frac{y+\sqrt{y^2+C}}{x+\sqrt{x^2-C}}\right|=A$$

yoki

$$\frac{y+\sqrt{y^2+C}}{x+\sqrt{x^2-C}}=A, \quad (A=\pm e^A).$$

Ba nihoyat, quyidagini olamiz

$$x^2-\frac{1-A^2}{A}xy-y^2=C(\frac{A^2+1}{2A})^2$$

bu—giperbolalar oilasi.

Quyidagi funksionallarning ekstremali topilsin:

199. $J = \int_{x_1}^{x_2} xy\sqrt{y'}\,dx$.

200. $J = \int_{1}^{e} xyy'^2\,dx$, $y(1)=0$, $y(e)=1$.

201. $J = \int_{x_1}^{x_2} G(y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

202. Agar intervalni oxirida qiymatlari berilmagan bo'lsa

$$J = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y'^2 + yy' + y' + y\right)dx$$

funksionalning minimumi topilsin.

203. $J = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$, $(y>0)$, funksionalning $\rho(x,y)$ maydon funksiyasi va *koordinata boshidan o'tuvchi ekstremallar maydonining o'zi topilsin.*

204. $x=0$ to'g'ri chiziqni $M(x_1,y_1)$, bu yerda $x_1>0, y_1>0$ nuqta bilan tutashtiruvchi chiziqlar orasidan

$$J = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx, \quad (y>0).$$

funksionalga minimum beradigani topilsin.

Quyidagi funksionalga egamiz

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$$

va uning $y=\varphi(x,C)$ ekstremallar maydoni berilgan bo'lsin. U holda, maydoning har bir nuqtasida shu nuqtadan o'tuvchi transversal maydon yo'nalishi ma'lum. Barcha maydon transversallari birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimi sifatida olinadi

$$F_{y'}[x,\varphi(x,C),\varphi_x'(x,C)]\frac{dy}{dx} = H[x,\varphi(x,C),\varphi_x'(x,C)],$$

bu yerda maydonni ekstremalini aniqlovchi $C$ parametr o'rniga, uni maydon nuqtalarining koordinatalari orqali ifodasini qo'yish kerak. Bu yerda $H(x,y,p)$ - gamiltonian.

**Misol 5.** $J = \int_{x_1}^{x_2} y'^2 dx$ funksionalning $y=Cx$ ekstremallar maydoni uchun transversal topilsin.

**Yechish.** Berilgan funksionalning gamiltonianini topamiz. Quyidagiga egamiz

$$F = y'^2, \quad F_{y'} = 2y', \qquad (F_{y'y'} = 2 \neq 0).$$

Faraz qilamizki, $p = F_{y'}$ bo'lib, undan $y' = \frac{p}{2}$ ni topamiz. Unda

$$H(-y'^2+2y'\cdot y')\Big|_{y=\xi} = \frac{p^2}{4}.$$

Quyidagi differensial tenglamani yechib, transversalni olamiz:

$$F_{y'}\Big|_{y=Cx}\frac{dy}{dx} = H\Big|_{p=2y'=2C}.$$

Bu yerda $C$ ni o'rniga maydon nuqtalari koordinatalari orqali $C=\frac{y}{x}$ ifodani qo'yish kerak. Quyidagiga egamiz

$$2y'\Big|_{y=Cx}\frac{dy}{dx} = \frac{p^2}{4}\Big|_{p=2C} \quad \text{yoki} \quad 2C\frac{dy}{dx} = C^2.$$

Shunday qilib, $C\neq 0$, u holda $2\frac{dy}{dx}=C$, yoki $2\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$. Bu yerdan transversallar oilasi $y^2=\tilde{C}x$ — parabolalarni topamiz.

**205.** $J=\int_{x_1}^{x_2}F(y')dx$ funksionalning $y=Cx$ ekstremallar maydoni uchun transversal topilsin.

**206.** $J=\int_{x_1}^{x_2}(xy_1'^4-2yy_1'^3)dx$ funksionalning $y=x+C$ ekstremallar maydoni uchun transversal topilsin.

**207.** $J=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{y(1-y_2'^2)}dx$ funksionalning $y=x-\frac{x^2}{C}$ ekstremallar maydoni uchun transversal topilsin.

$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$ funksonal uchun quyidagi

$$\frac{\partial W}{\partial x}+H(x,y,\frac{\partial W}{\partial x})=0$$

Gamilton—Yakobi tenglamasini bilgan holda, $F(x,y,y')$ integral ostidagi funksiyasini tiklash mumkin. Oxirgi tenglik quyidagi birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimi hisoblanadi

$$F-zF_z'=-H(x,y,F_z'), \tag{7}$$

bunda $H(x,y,p)$ - izlanayotgan funksionalning gamiltoniani deyiladi; $F(x,y,z)$ izlanayotgan funksiya ($x$ va $y$ lar esa parameterlar sifatida qaraladi), $F(x,y,z)$ funksiyani topganimizdan so'ng $z$ ning o'rniga $y'$ ni qo'yishimiz kerak bo'ladi.

**Izoh.** (7) tenglama Klero tenglamasi deb nomlanadi. Klero tenglamasini umumiy yechimi qoidaga ko'ra, $F(x,y,y')$ integral ostidagi funksiya $y'$ ga nisbatan chiziqli bo'lganligi sababli tashlab yuboriladi. Bu holda variatsion masala har doim ham yechimga ega bo'lavermaydi. Shuning uchun ham Klero tenglamasini maxsus yechimi olinadi va bu maxsus yechim $F(x,y,z)$ funksiyaning izlanoyotgan funksiyasi bo'ladi.

**Misol 6.** $J=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ funksionalning ekstremumini topish haqidagi masala uchun Gamilton—Yakobi tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$(\frac{\partial W}{\partial x})^2+(\frac{\partial W}{\partial y})^2=x^2+y^2.$$

$F(x,y,y')$ funksiya topilsin.

**Yechish.** Berilgan tenglamani $\frac{\partial W}{\partial x}$ hosilaga nisbatan yechamiz. U holda, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\sqrt{x^2+y^2-(\frac{\partial W}{\partial x})^2},$$

yoki

$$\frac{\partial W}{\partial x}-\sqrt{x^2+y^2-(\frac{\partial W}{\partial x})^2}=0.$$

Bundan gamiltonian quyidagicha bo'ladi

$$H=-\sqrt{x^2+y^2-p^2}.$$

(7) tenglama izlanayotgan $F$ funksiyasini topish uchun quyidagi ko'rinishga ega

$$F-z\frac{dF}{dz}=\sqrt{x^2+y^2-(\frac{\partial F}{\partial z})^2}. \tag{8}$$

(8) tenglamani ikkala tamonini $z$ bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{dF}{dz}-\frac{dF}{dz}-z\frac{d^2F}{dz^2}=-\frac{\frac{dF}{dz}\frac{d^2F}{dz^2}}{\sqrt{x^2+y^2-(\frac{\partial F}{\partial z})^2}},$$

$\frac{d^2F}{dz^2}=0$ bo'lgan holni tashlab, (umumiy yechimni beradi), quyidagiga ega bo'lamiz:

$$z=\frac{\frac{dF}{dz}}{\sqrt{x^2+y^2-(\frac{\partial F}{\partial z})^2}}.$$

Bu munosabatni $\frac{dF}{dz}$ ga nisbatan yechib, quyidagini topamiz

$$\frac{dF}{dz}=\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+z^2}}. \tag{9}$$

(9) ni (8) ga qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$F=z\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+z^2}}+\sqrt{x^2+y^2-\frac{z^2(x^2+y^2)}{\sqrt{1+z^2}}}=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+z^2}.$$

Shunday qilib, izlanoyotgan integral ostidagi funksiya quyidagi

$$F=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar quyidagi misollarda Gamilton—Yakobi tenglamasi ma'lum bo'lsa, ularning funksionallari topilsin:

**208.** $(\frac{\partial W}{\partial x})^2+(\frac{\partial W}{\partial y})^2=1.$ **209.** $4\frac{\partial W}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial y}=x^2\cdot y^2.$

**210.** $4xy\frac{\partial W}{\partial x}+(\frac{\partial W}{\partial y})^2=0.$ **211.** $(x\frac{\partial W}{\partial x})^2+(y\frac{\partial W}{\partial y})^2=x^2+y^2.$

## 13 §. Xos qiymat va xos funksiyalarni topishning variatsion usuli

Shturm –Liuvill tenglamasi

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y')+q(x)y=\lambda y \qquad (1)$$

quyidagi shartlar ostida

$$y(a)=0, \quad y(b)=0 \qquad (2)$$

ixtiyoriy haqiqiy, yoki kompleks $\lambda$ uchun $y=0$ nol (trivial) yechimga ega. Bu yerda $p(x)>0$ uzluksiz hosilaga ega, $q(x)$ - uzluksiz funksiyalar.

(1) tenglama va (2) chegaraviy shartlar birgalikda **Shturm – Liuvillning** (1)- (2) chegaraviy masalasi, deyiladi.

parametr $\lambda$ ning (1)- (2) chegaraviy masala trivial bo'lmagan $y\neq 0$ echimga ega bo'lgan qiymati **xos qiymat**, unga mos kelgan yechimi $y(x)$ esa (1)- (2) chegaraviy masalaning **xos funksiyasi** deyiladi.

(1) tenglama quyidagi shartli ekstremum masalasiga javob beradigan Eyler tenglamasini ifodalaydi: quyidagi funksionalning

$$J[y]=\int_a^b(py'+qy^2)dx \qquad (3)$$

(2) va quyidagi

$$\int_a^b y^2(x)dx=1 \qquad (4)$$

shartlar ostida minimumi topilsin.

Agar qandaydir $y(x)$ funksiya ushbu variatsion masalaning yechimi bo'lsa, u holda u (4) shartga asosan (1), (2) masalaning aynan noldan farqli yechimi bo'ladi.

Shuning uchun, Shturm –Liuvill chegaraviy masalaning xos qiymat va xos funksiyalari

(3) funksionalning (2) va (4) shartlardagi xos qiymat va xos funksiyasi, deyiladi.

Xos funksiya $y(x)$ **normallangan,** deyiladi, agar

$$\int_a^b y^2(x)dx = 1$$

bo'lsa.

**Misol 1.**

$$J[y] = \int_0^3 ((2x+3)^2 y'^2 - y^2)dx$$

funksionalning

$$y(0) = y(3) = 0, \qquad (5)$$
$$\int_0^3 y^2(x)dx = 1,$$

shartlar ostida xos qiymat va xos funksiyasi topilsin.

**Yechish.** Shturm –Liuvill tenglamasi quyidagi ko'**rinishni oladi**

$$-y - \frac{d}{dx}\left[(2x+3)^2 y'\right] = \lambda y,$$

yoki

$$(2x+3)^2 y'' + 4(2x+3)y' + (\lambda+1)y = 0. \qquad (6)$$

(6) tenglama $2x+3 = e^t$ almashtirish orqali chiziqli o'**zgarmas** koeffisientli differensial tenglamaga keltiriladi

$$4\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\right) + (\lambda+1)y = 0 \qquad (7)$$

Uning xarakteristik tenglamasi

$$4k^2 + 4k + \lambda + 1 = 0$$

ko'rinishda bo'lib, uning ildizlari $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}$.

Uch holni ko'rib chiqamiz:

1) $\lambda < 0$ bo'lsin. U holda (7) tenglamaning umumiy yechimi $y(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$

$k_1$ va $k_2$ haqiqiy sonlar, demak, (6) tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = C_1(2x+3)^{k_1} + C_2(2x+3)^{k_2}.$$

(5) chegaraviy shartlardan $C_1 3^{k_1} + C_2 3^{k_2} = 0$, $C_1 9^{k_1} + C_2 9^{k_2} = 0$ larga ega bo'lamiz. Bundan $C_1 = 0$ va $C_2 = 0$ va $y(x) = 0$.

2) $\lambda = 0$ bo'lsin, u holda

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{t}{2}}$$

bo'lib,

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln[(2x+3)]\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

bo'ladi. Chegaraviy shartlardan $C_1 + C_2 \ln 3 = 0$, $C_1 + C_2 \ln 9 = 0$, **bulardan** $C_1=0$ va $C_2=0$ demak, $y(x) = 0$.

3) $\lambda > 0$ bo'lsin, bunda $k_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{\lambda}/2$ va (7) tenglamaning umumiy yechimi

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} C_1 \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2})t + C_2 \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2})t$$

bo'ladi, bundan $x$ o'zgaruvchiga o'tsak,

$$y(x) = \frac{C_1 \cos((\sqrt{\lambda}/2)\ln(2x+3)) + C_2 \sin((\sqrt{\lambda}/2)\ln(2x+3))}{\sqrt{2x+3}}, \tag{8}$$

(5) chegaraviy shartdan quyidagini olamiz

$$\begin{cases} C_1 \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3) = 0, \\ C_1 \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 9) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 9) = 0,. \end{cases} \tag{9}$$

(9) ning determinanti

$$\begin{vmatrix} \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3) & \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3) \\ \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 9) & \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 9) \end{vmatrix} = 0, \text{ yoki } \sin(\sqrt{\lambda}\ln 3 - \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3) = 0, \text{ ya'ni } (\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3) = 0)$$

notrivial yechimga ega. Bundan $\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3 = n\pi$ bo'lib, uning xos qiymati $\lambda_n = \frac{4n^2\pi^2}{\ln^2 3}$ $(n = 1,2,...)$ bo'ladi. (9) tenglamadan ixtiyoriysini olib, masalan, birinchisida $\lambda$ o'rniga $\lambda_n$ ni qo'ysak $C_1 \cos n\pi + C_2 \sin n\pi = 0$ yoki $C_1(-1)^n = 0$. Bundan $C_1 = 0$. (8) ga $C_1 = 0$ va $\lambda_n = \frac{4n^2\pi^2}{\ln^2 3}$ larni qo'ysak, u holda berilgan masalaning xos funksiyasini topamiz

$$y(x) = C_n \frac{\sin(\frac{n\pi \ln(2x+3)}{\ln 3}}{\sqrt{2x+3}}, \qquad (n = 1,2,...),$$

$C_n$ koeffisientlarni $\int_0^3 y^2{}_n(x)dx = 1$, $Cn = \pm\frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$, normallanganlik shartidan topamiz $C_n = \pm\frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$. Demak,

$$y(x) = \pm\frac{2}{\sqrt{\ln 3}} \frac{\sin(\frac{n\pi \ln(2x+3)}{\ln 3}}{\sqrt{2x+3}}, \qquad (n = 1,2,...).$$

Quyidagi masalalarning xos qiymat va xos funksiyasi topilsin:

212. $J[y]=\int_0^1 (y^2+y'^2)dx,\ y(0)=y(1)=0,\quad \int_0^1 y^2\,dx=1.$

213. $J[y]=\int_1^2 (x^2y'^2)dx,\quad y(1)=y(2)=0,\quad \int_1^2 y^2\,dx=1.$

214. $J[y]=\int_1^e (6y^2+x^2y'^2)dx,\quad y(1)=y(e)=0,\quad \int_1^e y^2\,dx=1.$

215. $J[y]=\int_\pi^{2\pi} (y^2-y'^2)dx,\quad y(\pi)=y(2\pi)=0\quad \int_\pi^{2\pi} y^2dx=1.$

216. $J[y]=\int_0^1 (3y^2-(x+1^2)y'^2)dx,\quad y(0)=y(1)=0,\ \int_0^1 y^2\,dx=1.$

(3), (2), (4) variatsion masalaning xos qiymat va xos funksiyalari bir qator muhim hossalarga ega:

1) agar $\lambda_m$ va $\lambda_n$ lar (3) funksionalning (2) va (4) shartlar ostidagi turli xos qiymatlari bo'lsa, $y_m(x)$ va $y_n(x)$ lar ularning xos funksiyalari bo'lsa, u holda bu funksiyalar ortogonal bo'ladi, ya'ni $\int_a^b y_m(x)y_n(x)dx=0,\ \ (m\neq n)$.

2) (3) funksionalning barcha $\lambda_n$ xos qiymatlari haqiqiy.

3) agar $\lambda_n$ (3) funksionalning xos qiymati bo'lsa va $y_n(x)$ unga mos normallangan xos funksiyasi bo'lsa, u holda qiymatlari quyidagini qanoatlantiradi,
$J[y_n(x)]=\lambda_n$ bo'ladi.

4) xos qiymatlarning eng kichigi (3) funksionalning (2) va (4) shartlar asosidagi minimumi bilan ustma-ust tushadi.

**Misol 2.** $\int_0^\pi y'^2(x)dx\geq\int_0^\pi y^2(x)dx,\quad y(0)=y(\pi)=0$ tengsizlikni isbotlang.

**Yechish.** $\int_0^1 y^2\,dx=1,\ y(0)=y(\pi)=0$ shartlar ostida $\min\int_0^\pi y'^2(x)dx$ ni topamiz.

$\int_0^\pi y'^2(x)dx-\lambda\int_0^\pi y^2(x)dx$ funksional uchun Eyler tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi

$$y''+\lambda y=0,\quad y(0)=y(\pi)=0.$$

Oxirgi masalaning xos funksiyasi $y_n(x)$ =sinnx, xos qiymati $\lambda_n=n^2$ bo'ladi. Eng kichik xos qiymat $\lambda_1=1$. Shuning uchun 4) xossaga asosan $\min\int_0^\pi y'^2(x)dx=1$ bo'ladi. Bundan, $\int_0^1 y^2\,dx=1$ bo'lgan ixtiyoriy funksiya uchun $\int_0^\pi y'^2(x)dx\geq\int_0^\pi y^2(x)dx$

tengsizlikka ega bo'lamiz. $y_1(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}$ da $\int_0^{\pi} y'^2(x)dx=\int_0^{1} y_1^2 dx=1$ bo'lganligidan bu tengsizlikni kuchaytirish mumkin emas.

**Eslatma.** Agar $\int_0^1 y^2\,dx=k\neq 1$ bo'lsa, u holda $z(x)=\frac{y(x)}{k}$ funksiyani kiritish yo'li bilan oldingi masala keltiriladi.

**Misol 3.** $y''+\lambda^2 y=0$, $y(1)=y(-1)=0$ masalaning taqribiy usul bilan birinchi xos qiymati topilsin.

**Yechish.** y(-1)=y(1)=0 va $\int_{-1}^{1} y^2(x)dx=1$ shartlar ostida $\int_{-1}^{1} y'^2 dx$, funksionalni minimumini topish izoperimetrik masala hisoblanib, u

$$J=\int_{-1}^{1}(y'^2-\lambda^2 y^2)dx$$

funksionalning minimumi haqidagi masalaga keltiriladi, ushbu masalaning Eyler tenglamasi berilgan $y''+\lambda^2 y=0$, $y(1)=y(-1)=0$ differensial tenglama bilan ustma-ust tushadi.

Uning umumiy yechimi y(x)= $y(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$ bo'ladi. Chegaraviy shartlardan

$$\begin{cases} C_1\cos\lambda-C_2\sin\lambda=0, \\ C_1\cos\lambda+C_2\sin\lambda=0, \end{cases} \tag{10}$$

larni topamiz, shuning uchun (10) tizimning nol bo'lmagan yechimining mavjud bo'lishlik sharti $\sin 2\lambda=0$, yoki $\lambda=n\pi/2$ bo'ladi. Shunday qilib, 1- xos qiymat uchun $\lambda_1^2=(\pi/2)^2$ ga ega bo'lamiz va asosiy struna toni $y=\cos\pi x/2$, $\lambda=\pi/2$ yechim orqali beriladi. 1- oberton $y=\sin\pi x$ $\lambda=\pi$; 2-oberton $y=\cos 3\pi x/2$, $\lambda=3\pi/2$ va hokazo. Taqribiy solishtirish uchun juft yechimni x ning juft darajalarida joylashgan ko'phad ko'rinishida qidiramiz. Koordinatali funksiyani quyidagi $\phi_k(x)=x^{2k-2}-x^{2k}$, (k=1,2...), ko'rinishda olamiz va $y_n(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k(x)$ funksiyalarda $J$ funksionalni minimumlash-tiramiz.

$y_1(x)=c_1\phi_1(x)$ chegaralangan holda I= $c_1^2$ (8/3- 16/15 $\lambda^2$)=0, deb olamiz, $c_1$ ni aniqlash uchun $\frac{\partial I}{\partial c_1}=2c_1$(8/3- 16/15 $\lambda^2$)=0 ni olamiz, bunda $c_1\neq 0$ bo'lishi kerak, u holda $\lambda^2=2{,}5$ bo'ladi. $y$ sifatida $y=c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)$ deb olib, I= $c_1^2$ (8/3- 16/15 $\lambda^2$)+2 $C_1C_2$(8/15-16/105 $\lambda^2$) +$C_2^2$ (16/15-32/315 $\lambda^2$) ni topamiz, va $c_1, c_2$ larni aniqlash uchun quyidagi tizimga ega bo'lamiz:

$$\frac{\partial I}{\partial c_1}=c_1(16/3-32/15\lambda^2)+C_2(8/15-32/105\lambda^2)=0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial C_2}=c_1(16/15-32/105\lambda^2)+C_2(176/105-32/315\lambda^2)=0.$$

Oxirgi tizimda nol bo'lmagan $C_1$ va $C_2$ yechimlarini mavjud bo'lish uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi kerak, bundan quyidagini olamiz: $\lambda^4 - 28\lambda^2 + 63 = 0$ bu erda $\lambda_1^2 = 2{,}46744$, $\lambda_2^2 = 25{,}53256$. Topilgan taqribiy $\lambda_1^2$, $\lambda_2^2$ qiymatni anig'i bilan taqqoslaymiz. $\lambda_1^2$ ning aniq qiymati $(\pi/2)^2 \approx 2{,}46740$, $\lambda_2^2$ ning aniq qiymati esa $(3\pi/2)^2 \approx 22{,}20661$ ga teng. Shuning uchun $\lambda_1^2$ uchun olingan taqribiy qiymat ancha to'g'ri, lekin bir vaqtning o'zida ikkinchi xos qiymat uchun olingan taqribiy qiymat ancha qo'pol.

**Misol 4.** $y'' + \lambda(1+x^2)y = 0$, $y(-1) = y(1) = 0$ masalaning 1- xos qiymati topilsin.

**Yechish.** Koordinatli funksiyalar sifatida $\phi_k(x) = 1 - x^{2k}$, (k=1,2...), funksiyani olamiz. Ravshanki, bu funksiya chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

$y(x) = C_1(1-x^2) + C_2(1-x^4)$ deb olib, $J[y] = \int\limits_{-1}^{1}(y'^2 - \lambda(1+x^2)y^2)dx$ funksionalni minimumallashtirish masalasini qo'yamiz, bu masala uchun berilgan tenglama Eyler tenglamasi bo'ladi. Quyidagiga ega bo'lamiz

$$J = C_1^2(8/3 - 128/105\lambda) + 2C_1C_2(16/5 - 64/45\lambda) + C_2^2(32/7 - 5888/3465\lambda).$$

$c_1, c_2$ larni aniqlash uchun quyidagi tizimga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial C_1} = 2C_1(8/3 - 128/105\lambda) + 2C_2(16/5 - 64/45\lambda) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial C_2} = 2C_1(16/5 - 64/45\lambda) + 2C_2(32/7 - 5888/3465\lambda) = 0. \end{cases}$$

Bu tizimning nol bo'lmagan yechimga ega sharti $52\lambda^2 - 1068\lambda + 2079 = 0$ ni beradi, bundan eng kichik ildizini olib, $\lambda_1 \approx 2{,}1775$ ni topamiz.

***Rele prinsipi.*** Aytaylik, bizga xos qiymatni topish masalasi berilgan bo'lsin

$$L(y) = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = \lambda r(x)y, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

bu yerda *p(x), p'(x), q(x), r(x)* lar [a,b] kesmada uzluksiz; [a,b] da *p(x)*>0.

*y(x)* ni joiz funksiya, deb ataymiz ($y \in D$), agarda u ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va (12) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsa.

Faraz qilaylik, har bir *y(x)* joiz funksiya uchun quyidagi shart bajarildi

$$\int\limits_a^b yL(y)dx \ge 0.$$

Bu holda (11),(12) chegaraviy masala $\lambda$ ning faqat haqiqiy xos qiymatiga ega bo'ladi.

Xos qiymat haqidagi masalani mos holda quyidagi variatsion masala **ko'rinishida** ham qo'yish mumkin:

$$\int_a^b r(x)y^2dx > 0 \qquad (13)$$

**shartni** qanoatlantiruvchi $y(x)$ joiz funksiyalar ichidan shundayini topinki,

$$\frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b r(x)y^2dy} = \min$$

bo'lsin.

Aytaylik, $y = \psi_1(x)$ ushbu masalaning yechimi bo`lsin. **Agar** $\lambda_1$ **– minimal** qiymat bo`lsa, ya'ni

$$\lambda_1 = \min_{y \in D} \frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b r(x)y^2dx} = \frac{\int_a^b \psi_1 L(\psi_1)dx}{\int_a^b r\psi_1^2dx},$$

unda $\lambda_1$ – eng kichik musbat xos qiymat bo`ladi, $\psi_1(x)$ esa unga mos kelgan xos funksiya.

Agarda $y(x)$ joiz funksiyalarga (16) dan boshqa yana bir

$$\int_a^b r\psi_1 ydx = 0$$

(ortogonallik sharti) shartini qo`ysak, u holda masala quyidagicha bo`ladi

$$\frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b ry^2dx} = \min$$

va yana qaysidir $\psi_2(x)$ yechimga ega bo`ladi.

Agar $\lambda_2$–minimal qiymat bo`lsa, u holda $\lambda_2$ qiymati bo'yicha keyingi ($\lambda_2 \geq \lambda_1$) xos qiymat bo`ladi, $\psi_2(x)$ funksiya esa unga mos kelgan, $\psi_1(x)$ ga ortogonal bo'lgan xos funksiya boladi. Umuman, birinchi $k$ ta musbat xos qiymatlar ma'lum bo`lsa

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k$$

va ularga mos ortogonal xos funksiyalar tizimi $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_k(x)$, bo`lsa, u holda keyingi xos qiymat quyidagicha bo`ladi

$$\lambda_{k+1} = \min_{y \in D} \frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b ry^2dx},$$

chunki, shunday $y(x)$ joiz funksiyalarni qaraymizki, (16) dan boshqa quyidagicha qo`shimcha shartlar ham bajariladi

$$\int_a^b r(x)\psi_\nu(x)y(x)dx = 0 \qquad (\nu = 1,2,...,k).$$

Agar (11) tenglamadagi funksiya $[a,b]$ kesmada $r(x)>0$ bo'lsa, u holda eng kichik musbat $\lambda_1$ xos qiymatni yuqoridan baholash uchun ko'p hollarda quyidagi tengsizlik ishlatiladi (Rele prinsipi)

$$\lambda_1 \le \frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b ry^2dx}.$$

**Misol 5.** Rele prinsipi yordamida quyidagi chegaraviy masala uchun

$$-y'' = \lambda y,$$
$$y'(0) = 0,$$
$$y(1) = 0.$$

$\lambda_1$ xos qiymatni baholang.

**Yechish.** Biz qarayotgan hol uchun $[0,1]$ kesmada $L(y) = -y''$, $p(x)=1>0, q(x)=0,\ r(x)=1>0$ bo'ladi. Ko'rinib turibdiki, $\alpha_1=0, \beta_1=1, \alpha_2=1, \beta_2=0$ shuningdek, $\alpha_1^2+\beta_1^2=1>0, \alpha_2^2+\beta_2^2=1>0$. $y(x)$ joiz funksiya sifatida $y(x)=1-x^2$ ni olamiz.

Rele prinsipiga ko`ra, quyidagiga ega bo`lamiz

$$\lambda_1 \le \frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b ry^2dx} = \frac{\int_0^1 2(1-x^2)dx}{\int_0^1 (1-x^2)dx} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{15}} = 2,5.$$

Ta'kidlash lozimki, aniq qiymat $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} \approx 2,4674.$ ga teng bo`ladi.

Quyidagi masalalarda eng kichik xos qiymatlar baholansin:

**217.** $-y'' = \lambda(10-x^2)y;\ y(-1)=y(1)=0.$

**218.** $-y'' = \lambda y; y(0)=y(1)=0.$

Kantorovich usulidan ham (oddiy differensial tenglama ko`rinishiga keltirish usuli) xos qiymat va xos funksiyalarni o`rganishda foydalanish mumkin. Misol uchun $D$ sohada quyidagi tenglamaga ega bo`laylik,

$$\Delta z + \lambda z = 0$$

va

$$z\big|_\Gamma = 0$$

bo'lsin, bu yerda $\Gamma - D$ sohaning chegarasi.

Yechimni quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x)\varphi_k(x,y) + \varphi_0(x,y),$$

hozircha $\varphi_k(x,y)$ – koordinatali funksiyalar va $\alpha_k(x)$ noma'lum funksiyalarni shunday tanlaymizki, natijada $z_m(x,y)$ funksiya $\Gamma$ da nolga aylanisin. Bu $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ , ... , $\alpha_m(x)$ funksiyalar quyidagi tenglamalar tizimni qanoatlantirishi kerak

$$\int_{D_x}[\Delta z_m + \lambda z_m]\varphi_k(x,y)dy = 0, \qquad (m = 1,2,...,n), \tag{14}$$

va argumentning chegaraviy qiymatlarida nolga aylanadi. Bu erda $D_x$ - $D$ sohaning $x$ = const chiziq bo`ylab kesimi.

(14) tizim notrivial yechimga ega bo'ladigan $D_x$ qiymatlarida xos qiymatning taqribiy miqdorini beradi, yechimning o'zi esa xos funksiyaga yaqinlashishini beradi.

**Misol 6.** Berilgan

$\Delta z + \lambda z = 0$, $z|_\Gamma = 0$

masalaning taqribiy birinchi xos qiymati va birinchi xos funksiyasi topilsin, bu yerda $D$ soha to`g`ri to`rtburchak $-a\le x\le a$, $-b\le y\le b$.

**Yechish.** Masalaning yechimini quyidagicha izlaymiz $z_1(x,y) = (y^2 - b^2)\alpha_1(x)$.

Bu holda, (14) tenglama quyidagi ko`rinishga ega bo'ladi:

$$\int_{-b}^{b}[2\alpha_1 + (y^2 - b^2)\alpha_1'' + \lambda(y^2 - b^2)\alpha_1](y^2 - b^2)dy = 0$$

$$\frac{16}{15}b^5\alpha_1'' + (\frac{16}{15}b^5\lambda - \frac{8}{3}b^3)\alpha_1 = 0. \tag{15}$$

$\alpha_1(-a) = \alpha_1(a) = 0$. (15) ning umumiy yechimi quyidagicha:

$$\alpha(x) = C_1\sin\sqrt{\lambda - \frac{5}{2b^2}}\cdot x + C_2\cos\sqrt{\lambda - \frac{5}{2b^2}}\cdot x.$$

Masalaning simmetrikligini hisobga olib va xususiy yechimini tanlab, quyidagi ko`rinishga ega bo`lamiz

$$C_1 = 0,\ C_2\cos\sqrt{\lambda - \frac{5}{2b^2}}\cdot a = 0,$$

bundan ko`rinib turibdiki, notrivial yechim faqat

$$\sqrt{\lambda - \frac{5}{2b^2}}\cdot a = (2k-1)\frac{\pi}{2};$$

$$\lambda = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{(2a)^2} + \frac{5}{2b^2}.$$

ifoda bo`lgandagina topiladi.

Xususiy holda k=1 uchun quyidagicha bo`ladi

$$\lambda = \frac{\pi^2}{(2a)^2} + \frac{10}{(2b)^2}.$$

Aniq qiymatning o`rniga

$$\lambda = \frac{\pi^2}{(2a)^2} + \frac{\pi^2}{(2b)^2}.$$

Bunda xatolik 13 foizdan dan kichik.

Birinchi xos funksiya uchun quyidagi taqribiy funksiyaga ega bo`lamiz:

$$z_1(x, y) = (y^2 - b^2)\cos\frac{\pi x}{2a}.$$

Quyidagi masalalarda taqribiy birinchi xos qiymat topilsin:

**219.** $y'' + \lambda^2 y = 0, y(0) = y(1) = 0.$

**220.** $y'' + \lambda(2 + \cos x)y = 0, y(0) = y(\pi) = 0.$

**221.** Berilgan

$$\Delta z + \lambda z = 0, \ z|_{\Gamma} = 0$$

masalaning birinchi taqribiy xos qiymati topilsin. Bu yerda $D$ – markazi koordinata boshida bo'lgan birlik radiusli doira.

## III BOB

## OPTIMAL BOSHQARUV NAZARIYASI

### 14 §. Optimal boshqaruv masalasining umumiy qo'yilishi

**1. Ob'yektning dinamikasi.** Optimal boshqaruv masalasi uchun ma'lum bir dinamik ob'yekt, ya'ni vaqt davomida o'zgaruvchi ob'yektning mavjud bo'lishi xarakterlidir. Ob'yektning har bir t vaqtdagi xatti-harakati $x_1(t)...,x_n(t)$ parametrlar to'plami orqali tavsiflansin. Bularga ob'yektning biron-bir koordinatalar tizimidagi koordinatalari, tezlikning koordinatalari va h.k. lar misol bo'lishi mumkin. $x(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$ vektor ob'yektning *fazali vektori* deyiladi. Ob'yektning harakatini boshqarish mumkin, ya'ni u o'zining holatini belgilab beruvchi "rullar" bilan jihozlangan, deb faraz qilinadi. "Rullar" ning holati har bir vaqt momenti t da $u_1(t),...,u_m(t)$ parametrlar to'plami bilan xarakterlanadi. $u(t)=(u_1(t),...,u_m(t))$ vektor ob'yektning boshqaruv parametri, yoki boshqaruvi, deyiladi. Ob'yektning berilgan t vaqt momentidagi holati u(t) boshqaruvning t vaqt momentigacha bo'lgan davr ichida qanday qiymatlar qabul qilganiga bog'liq bo'lib, boshqaruvning kelgusi xatti-harakatiga bog'liq bo'lmaydi.

x(t) fazali holat vektorining u(t) boshqaruvga nisbatan bog'liqlikning xususiyatlariga qarab, har xil turdagi dinamik ob'yektlar ko'zdan kechiriladi. Masalan, bunday bog'lanish

$$\dot{x}=f(t,x,u) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi differensial tenglamalar tizimi ko'rinishida ifodalanishi mumkin. Bunda u(t) boshqaruvning har bir t vaqt momentidagi qiymatini bilgan holda, x(t) obyektning holatini

$$\dot{x}=f(t,x,u(t))$$

differensial tenglamaning yechimi ko'rinishida topish mumkin. Bizga biror bir ko'rinishdagi ob'yektning dinamikasi, ya'ni x(t) holat vektorining u(t) boshqaruv vektoriga nisbatan bog'liqligi berilgan bo'lsin.

**2. Joiz boshqaruvlar sinfi.** Ma'lumki, aniq fizik ob'yektlarda u(t) boshqaruv ixtiyoriy ravishda tanlanishi mumkin emas. Unga boshqaruvning fizik ma'nosidan kelib chiqqan holda ma'lum bir cheklanishlar yuklatilgandir. Masalan, agar $u_1(t)$ dvigatelning tortish kattaligi bo'lsa, u holda har bir t vaqt momentida u

$$u_{min}\le u_1(y)\le u_{max}$$

chegaralanishni qanoatlantirilishi kerak. Jumladan, $u_1(t)$ tortish qiymati $u_{min}$ va $u_{max}$ chegaraviy qiymatlarni ham qabul qilishi lozim. Odatda, u(t) boshqaruv vektori har bir t vaqt momentida

$$u(t)\in U \qquad (2)$$

chegaralanishni qanoatlantiradi, deb faraz qilinadi, bu yerda $U$ - biron berilgan to'plamdir ya'ni u(t) boshqaruvning qiymatlar sohasi, deyiladi. Jumladan, odatda aniq fizik obyektlarda $U$ yopiq to'plam bo'ladi. Aynan shu yopiqlik boshqariluvchi obyektning xatti-harakatini odatiy variatsion hisob usullari bilan o'rganishga imkon bermaydi.

(2) ko'rinishdagi chegaralanishdan tashqari $u(t)$ boshqaruvning vaqtga bog'liqligiga nisbatan qo'shimcha chegaralanishlar qo'yilishi mumkin. Masalan, joiz boshqaruvlarga faqatgina silliq, uzluksiz, bo'lakli-uzluksiz funksiyalar kiritilishi mumkin. Bizga u(t) joiz boshqaruvlar sinfi biron bir yo'l bilan berilgan bo'lsin.

**3. Ob'yektning boshlang'ich va oxirgi holatlari.** Bizga boshlang'ich vaqt momenti $t_0$ va ob'yektning joiz boshlang'ich holatlar to'plami $M_0$ berilgan bo'lsin. Ob'yekt u ma'lum bir chekli vaqt momenti $t_1$ da joiz chekli holatlar to'plami $M_1$ ga o'tib qoladigan qilib boshqarish kerak. U(t) joiz boshqaruv unga mos keluvchi x(t) obyektning bazaviy holati

$$x(t_0) \in M_0 \qquad x(t_1) \in M_1 \tag{3}$$

shartni qanoatlantirganda, $[t_0, t_1]$ oraliqda obyektni boshlang'ich $M_0$ to'plamdan chekli $M_1$ to'plamga ko'chiradi, deb faraz qilamiz. Oxirgi $t_1$ vaqt momenti oldindan berilmasdan turib, x(t) to'plamning chekli $M_1$ to'plamga tushish shartidan topilishi mumkin.

4. Sifat mezoni. $M_0$ holatni $M_1$ ga o'tkazadigan har xil hollar uchrashi mumkin. Amalda ko'pincha shunday o'tishlar ichida qandaydir ma'noda eng yaxshisini tanlash maqsadga muvofiqdir. Odatda har bir joiz boshqaruv u(t) va unga mos keluvchi holatlar vektori x(t) ga (u(t), x(t)) juftlikning sifatini baholovchi biron bir J son mos qo'yilgan, ya'ni J(u(t), x(t)) funksional yoki boshqacha qilib aytganda sifat ko'rsatkichi berilgan, deb faraz qilinadi. Masalan, bu funksionalning ko'rinishi

$$J(u(t), x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, x(t), u(t))dt \tag{4}$$

kabi ham bo'lishi mumkin. Endi, optimal boshqaruv masalasini ifodalash mumkin. Uning mazmun-mohiyati obyektni boshlang'ich $M_0$ to'plamdan $M_1$ to'plamga ko'chiruvchi $u^*(t)$ boshqaruv va unga mos keluvchi $x^*(t)$ vektorni tanlashdan iborat bo'lib, bunday vaziyatda J(u(t), x(t)) sifat funksionali o'zining minimal qiymatiga erishadi, ya'ni

$$J(u^*(t), x^*(t)) = \min J(u(t), x(t))$$

bo'ladi.

Optimal boshqaruv masalalariga doir misollarni ko'rib o'taylik.

**Misol 1.** Yo'ldosh ma'lum bir doirasimon orbita bo'ylab Yer atrofida harakatlansin. Nazariy mexanikadan ma'lumki, yo'ldoshning harakatini biror aniqlik darajasida (1)-turdagi oddiy differensial tenglamalar tizimi ko'rinishida yozish mumkin. Bunda yo'ldoshning Yer bilan bog'liq qo'zg'almas koordinatalar tizimiga nisbatan holat vektorining koordinatalari, tezlik vektorining koordinatalari, yo'ldoshning vaziyatini berib qo'yuvchi burchaklar, burchak tezlik va h.k. lar x(t) fazali holat vektorining koordinatalari bo'lib xizmat qilishi mumkin. Yonilg'ining birlik vaqt ichida sarf bo'lish miqdori, reaktiv dvigatelning burilish burchaklari u(t) boshqaruv vektorining koordinatalari bo'lib xizmat ko'rsatishi mumkin.

Faraz qilaylik, yo'ldoshni yangi orbitaga ko'chirish, ya'ni boshqaruvni mos x(t) trayektoriya birinchi doirasimon orbitada $t_0$ vaqtda boshlanib, ikkinchi doirasimon orbitada ma'lum bir $t_1$ vaqtda tugaydigan qilib tanlash kerak bo'lsin. Bunda boshlang'ich $M_0$ to'plam sifatida yo'ldoshning birinchi orbitadagi koordinatalarini ifodalovchi qiymatlarni, joiz boshlang'ich tezliklar va h.k. larni olish mumkin. Xuddi shu mulohazalar $M_1$ to'plam uchun ham o'rinli bo'ladi.

Sifat mezoni sifatida birinchi orbitadan ikkinchisiga o'tishda sarf qilingan umumiy yonilg'i miqdori tanlab olinishi mumkin. Shunday qilib, optimal boshqaruv masalasi yo'ldoshni birinchi doirasimon orbitadan ikkinchisiga minimal yonilg'i harajati bilan ko'chiruvchi u(t) joiz boshqaruvni tanlashdan iboratdir.

**Misol 2.** Muvozanat holatida turgan fizik mayatnikni ko'rib chiqaylik. Agar y- mayatnikning muvozanat holatidan chetlashish kattaligi bo'lsa, mayatnikning eng sodda holdagi tenglamasi:

$$\ddot{y}+y=0$$

ko'rinishda bo'ladi. Faraz qilaylik, biz mayatnikka kattaligi jihatidan chegaralangan, ya'ni $|u|\le 1$ bo'lgan u tashqi kuchni qo'yishimiz mumkin. U holda, boshqariluvchi mayatnikning tenglamasi

$$\ddot{y}+y=u$$

ko'rinishda bo'ladi. Ushbu tenglamada $x_1=y,\ x_1=\dot{y}$ deb olish natijasida (1)-ko'rinishga keltirib olamiz. U holda biz

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_1 = -x_1 + u, \end{cases} \tag{5}$$

ga ega bo'lamiz. Mazkur holda $x=(x_1,\ x_2)$ fazali vektor faqatgina ikkita koordinata: mayatnikning muvozanat holatiga nisbatan chetlashish qiymati $x_1=y$ hamda chetlashish tezligi $x_2=y$ ga ega bo'ladi xolos. O'chiq boshqaruvda, ya'ni u=0 da muvozanat holati $x_1=0$, $x_2=0$ shart orqali beriladi. Faraz qilaylik, tashqi ta'sirlar ostida mayatnik ixtiyoriy $x_0=\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ holatga o'tsin. Bunday holatda ayrim fizik mulohazalar tufayli yechimni topib bo'lmaydi, shuning uchun, fizik mayatnikni u(t) tashqi kuchni mos ravishda tanlab olish natijasida tezkor sur'atlar bilan muvozanat holatga keltirib olish maqsadga muvofiq bo'lib, bunda, yana fizik mulohazalar tufayli u(t) funksiya bo'lakli uzluksiz bo'lishi kerak.

Shu yo'l bilan biz, mayatnikning x(t) trayektoriyasi, ya'ni (5)-tenglamaning yechimini $M_0=x^0=\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ boshlang'ich holatdan $M_1=(0,0)$

muvozanat holatga eng qisqa vaqt ichida o'tkazuvchi hamda $|u(t)|\leq 1$ shartni qanoatlantiradigan tashqi bo'lakli-uzluksiz u(t) kuchni tanlab olishuvchi optimal boshqaruv masalasiga kelib qolamiz.

Xullas, biz optimal boshqaruv masalasining asosiy elementlarini aniqlab oldik, hamda ikkita misolni tahlil qildik. Endilikda biz optimal boshqaruv masalasining matematik tadqiqoti bilan shug'ullanamiz. Optimal boshqaruvning matematik nazariyasi qanday masalalarni o'z ichiga oladi?

**1. Boshqariluvchanlik.** Birinchi navbatda, dinamik obyektni boshlang'ich $M_0$ to'plamdan oxirgi $M_1$ to'plamga o'tkazadigan aqalli bitta u(t) joiz boshqaruv bormi, ya'ni x(t) fazali holat vektori (3) shartni qanoatlantiradigan u(t) joiz boshqaruv bormi degan savol tug'iladi. Agar bu savolga salbiy javob berilsa, u holda optimal boshqaruv masalasining qo'yilishi ham o'z ma'nosini yo'qotadi.

**2. Optimal boshqaruvning mavjudligi.** Agar boshqariluvchanlik to'g'risidagi masala ijobiy hal qilinsa, ya'ni obyektni $M_0$ to'plamdan $M_1$ to'plamga o'tkazuvchi biron bir u(t) boshqaruv mavjud bo'lsa, u holda optimal boshqaruv mavjudmi, degan savol tug'iladi. Muhandislar odatda aniq masalalarni yechishda bunday savolni o'z oldlariga qo'ymaydilar. Ular odatda o'zlarining qo'l ostida turgan vositalar bilan optimal boshqaruvni topishga harakat qiladilar, xolos. Matematik nuqtai nazardan bu eng muhim masalaridan biri hisoblanib, agar optimal boshqaruv mavjud bo'lmasa, keyingi izlanishlar o'z ma'nosini yo'qotadi. Matematikada biz, real fizik obyektning ma'lum bir modeli bilan ish ko'ramiz, xolos va modelda optimal boshqaruvning yo'qligi, uning noto'g'ri tuzilganiga ishora qiladi.

**3. Optimallikning zaruriy shartlari.** Agar masalada optimal boshqaruv mavjud bo'lmasa, u holda keyingi bosqichlarda mazkur optimal boshqaruvni topish usullarini rivojlantirish kerak. Hattoki eng sodda masalalarda ham obyektni $M_0$ to'plamdan $M_1$ to'plamga o'tkazuvchi joiz boshqaruvlarning soni cheksiz ko'p bo'lishi mumkin. Shuning uchun, barcha joiz boshqaruvlarni shunchaki saralab chiqish yetarli emas. Optimallikka shubha qilinuvchi boshqaruvlar sinfini qanday yo'l bilan qisqartirish mumkin, degan savol tug'iladi. Bunga optimallikning zaruriy shartlari yordamga keladi. Shunday qilib, optimal boshqaruvni optimallikning zaruriy shartlarini qanoatlantiruvchi joiz boshqaruvlar to'plami ichidan izlash kerak.

Optimallikning bunday zaruriy sharti Pontryaginning maksimum prinsipidir. Avvaliga u akademik Lev Semenovich Pontryagin tomonidan 1953-yilda dinamikasi (1) tenglama ko'rinishida ifodalanuvchi boshqaruv tizimlarga nisbatan gipoteza sifatida aytib o'tilgan bo'lib, keyinchalik, bu gipoteza Pontryaginning shogirdlari tomonidan isbotlangan edi. Aslida, optimal boshqaruvning matematik nazariyasi maksimum prinsipidan boshlangan edi. Ayrim masalalarda chekli sondagi yechimlargina maksimum prinsipini qanoatlantiradi, ularni ichidan esa optimalini topish qiyin emas. Maksimum prinsipining to'liq isboti 1961-yilda L.S.Pontryagin va uning shogirdlari tomonidan "*Optimal jarayonlarning matematik nazariyasi*" kitobida chop etilgan. *Maksimum prinsipining qo'llanilishi* optimal boshqaruvning ko'pgina muhandislik masalalarini yechishga, boshqa masalalarda esa optimal boshqaruvni topishda anchagina yordam berdi.

***4. Optimallikning yetarlilik sharti.*** *Ko'pgina* masalalarda optimallikning zaruriy shartlari optimallikka shubhalanuvchi boshqaruvlarning sinfini qisqartirishga imkon bersada, sinf hali-hanuz anchagina keng bo'lib qolaveradi. Bunday sinflar ichida haqiqatdan ham optimal yechimni tanlab olishga optimallikning yetarlilik shartli imkon beradi. Agar shu sinfdan olingan biron-bir u(t) boshqaruv optimallikning yetarlilik shartlarini qanoatlantirsa, u holda uning optimalligi kafolatlanadi. Albatta yetarlilik shartini bir emas, bir nechta boshqaruv qanoatlantirishi ham mumkin. Bu esa ularning barchasi optimal ekanligini, ya'ni sifat funksionali shu boshqaruvlarning hammasida bir xil qiymat qabul qilishini anglatadi.

**5. Optimal boshqaruvning yagonaligi.** Muhandislarning fikriga ko'ra, optimal boshqaruvning yagona ekanligini bilish juda muhimdir. Agar boshqaruv yagona bo'lsa, u holda aniq boshqariluvchi ob'yektlarda yagona u(t) optimal boshqaruvning amaliyotga tadbig'i oson kechishi mumkin. Shuning uchun, optimal boshqaruvning yagonaligi to'g'risidagi masala ham optimal boshqaruvga oid matematik nazariyaning asosiy masalalari qatoriga kiradi.

Ushbu masalalar aniq boshqaruv ob'yektiga nisbatan berilgan tartibda o'rganilishi shart emas. Masalan, agar, birinchi bo'lib optimal boshqaruvning mavjudligi aniqlanib, obyektni $M_0$ to'plamdan $M_1$ to'plamga o'tkazuvchi hamda optimallikning zaruriy shartlarini qanoatlantiruvchi yagona joiz boshqaruv u(t) topilgan bo'lsa, u holda u(t) boshqaruvning optimal ekanligi kafolatlanadi.

Shunday qilib, biz optimal boshqaruv masalasining umumiy qo'yilishini bayon qildik, mazkur masalani yechishda paydo bo'ladigan ayrim muhim masalalarni tahlil qilib chiqdik. Bu kursda eng sodda boshqaruv masalasining *matematik nazariyasi* o'rganiladi.

*Ushbu masaladagi ob'yektning dinamikasi*

$$\dot{x} = Ax + u_0 \tag{6}$$

chiziqli differensial tenglamalar tizimi ko'rinishida beriladi, bu yerda x- ob'yektning n-o'lchovli fazali holat vektori, u- n o'lchovli boshqaruv vektori, A- esa $n \times n$ o'lchovli o'zgarmas kvadrat matritsadir. u(t) boshqaruvning biron bir joiz funksiyasi hamda obyektning boshlang'ich holati $x(t_0)=x_0$ ni bilgan holda, biz fazali holat vektorining yagona funksiyasi x(t) ni (6)- differensial tenglamaning yechimi ko'rinishida olishimiz mumkin. Joiz boshqaruvlar sinfini yordamchi matematik apparat tayyorlangandan so'ng aniqlab olamiz. Obyektning boshlang'ich va oxirgi holatlarini n-o'lchovli fazalar fazosining elementlari sifatida bo'sh bo'lmagan hamda kompakt $M_0$ va $M_1$ qism to'plamlarini tanlaymiz. Sifat ko'rsatkichi sifatida $M_0$ to'plamdan $M_1$ to'plamga o'tish vaqti tanlab olinadi, ya'ni

$$J(u(t),x(t))=t_1-t_0.$$

Bunday sifat mezoni integral ostidagi funrsiya $f^0(t,x(t),u(t))=1$ bo'lgan holda (4) -sifat mezonidan kelib chiqadi.

Shunday qilib, biz chiziqli tezkorlik masalasining qo'yilishiga keldik. Ushbu masalaning mohiyati, ob'yektni $M_0$ to'plamdan $M_1$ to'plamga qisqa vaqt ichida o'tkazuvchi $u^*(t)$ joiz boshqaruv hamda (6)-tenglamaning $x^*(t)$ yechimini topishdan iboratdir. Bunday masalaga yuqoridagi 2-misolni keltirish mumkin.

Bu bobning birinchi qismi yordamchi matematik apparatni o'rganishga bag'ishlangan. Bunda tayanch funksiyalar, ko'p qiymatli akslantirishlar, ko'p qiymatli akslantirishlardan olingan integrallar va shunga o'hshash boshqa tushunchalarni batafsil o'rganib chiqamiz. Bu tushunchalar matematikaning boshqa bo'limlarida ham keng qo'llaniladi. Biz esa, ular yordamida optimal boshqaruvning matematik nazariyasiga oid asosiy masalalarni chiziqli tezkorlik masalasi misolida o'rganib chiqamiz.

## 15 §. Asosiy tushunchalar

$E^n$ **fazo.** $x=(x_1,\ldots x_n)$ o'zgaruvchining n o'lchovli $E^n$ evklid fazosini ko'raylik. Xususan, $E^1$- son o'qi, $E^2$-ikki o'lchovli tekislik va h.k. Odatda, kichik harflar bilan vektorlarni ya'ni, $E^n$ fazoning nuqtalarini, katta harflar bilan esa $E^n$ fazoning qism fazolarini belgilaymiz. Shuningdek, bunda, vektorlarni bitta nuqtadan iborat bo'lgan to'plam sifatida qabul qilamiz. Ushbu vektorlar figurali qavslarga olib yoziladi. Masalan, x-nuqta, $\{x\}$ esa to'plam. $E^n$ ikkita vektorni qo'shish hamda vektorni songa ko'paytirish amallari bajariladigan chiziqli vektor fazo bo'lsin. Shuningdek, bu fazo normallashgan bo'lib, unda norma $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ bilan aniqlanadi. $E^n$ fazosida faqatgina shunday normadan foydalaniladi. Bu norma $x,y\in E^n$ nuqtalar orasidagi masofani, yoki $\rho(x,y)=\|x-y\|$ metrikani aniqlaydi.

**To'plamlar.** $E^n$ fazodagi turli xil to'plamlarni ko'rib chiqaylik. Biz to'plamlarga nisbatan tegishlilik $\subset$, tenglik $=$, tengsizlik $\neq$, birlashma $\cup$, kesishma $\cap$, ikkita to'plamning ayirmasi, yoki to'ldirmasi $\setminus$ belgilaridan foydalanamiz. $\varnothing$ belgisi orqali bo'sh to'plamni ifodalaymiz.

f F to'plamning limit nuqtasi deyiladi, agar uning ixtiyoriy atrofi f dan farqli bo'lgan F to'plamning aqalli bitta nuqtasini o'z ichiga olsa. F yopiq to'plam deyiladi, agarda u o'zining barcha limit nuqtalarini o'z ichiga olsa. F to'plamning $\overline{F}$ yopig'i deb, F to'plamni o'z ichiga olgan eng kichik yopiq to'plamga aytiladi.

**Misol 1.** $E^n$ fazosida

$$P=\{x\in E^n, \|x\|<1\}$$

shart orqali berilgan P to'plamni qaraymiz. Bu yopiq to'plam bo'lmaydi, sababi, masalan, P to'plamning limit nuqtasi p=(1,0,..0) o'ziga tegishli emas. $E^n$ fazosida markazi a nuqtada bo'lgan r radiusli $S_r$(a) shar

$$S_r(a) = \{x \in E^n : \|x-a\| \le r\} \tag{1}$$

yopiq to'plamdir. Bundan tashqari, $S_1(0)$ shar $P$ to'plamning yopig'idan iborat bo'ladi, ya'ni $\overline{P} = S_1(0)$.

F chegaralangan to'plam, deyiladi, agar u biron bir chekli radiusli shar ichida yotsa, ya'ni qandaydir $r \ge 0$ ga nisbatan $F \subset S_r(0)$ munosabat o'rinli bo'lsa. F kompakt to'plam deyiladi, agar u yopiq va chegaralangan bo'lsa. Shunday qilib, 1-misoldagi $S_1(0)$ kompakt to'plam, P to'plam esa yopiq bo'lmaganligi hisobiga kompakt emas. Tekislikdagi to'g'ri chiziq o'zining chegaralanmaganligi hisobiga kompakt bo'lmagan to'plamga misol bo'ladi.

f nuqta F to'plamning ichki nuqtasi deyiladi, agar qandaydir $\varepsilon > 0$ uchun $S_\varepsilon(f) \subset F$ o'rinli bo'lsa. F ochiq to'plam deyiladi, agar uning ixtiyoriy nuqtasi ichki nuqta bo'lsa. F to'plamning barcha ichki nuqtalari majmuasi uning ichi deyiladi va $\operatorname{int} F$ orqali belgilanadi. 1-misolda $\operatorname{int} S_1(0) = P$. F to'plamning $\partial F$ chegarasi deb, $\partial F = \overline{F} \setminus \operatorname{int} F$ to'plamga aytiladi. Agar

$$S = \{x \in E^n : \|x\| = 1\}$$

$E^n$ fazodagi birlik sfera bo'lsa, u holda $\partial P = S$ bo'ladi.

F qavariq to'plam deyiladi, agar uning ixtiyoriy $x_1$ va $x_2$ nuqtalarini tutashtiruvchi kesma yana F to'plamga tegishli bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $x_1, x_2 \in F$ nuqtalar va $\alpha + \beta = 1$ munosabatni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\alpha, \beta \ge 0$ sonlar uchun $x(\alpha, \beta) = \alpha x_1 + \beta x_2 \in F$ shart bajarilsa. F to'plamning qavariq qobig'i $convF$ deb, F to'plamni o'z ichiga oluvchi eng kichik qavariq to'plamga aytiladi. Demak, ixtiyoriy $S_r$(a) shar qavariq to'plam bo'ladi, S birlik sfera esa qavariq to'plam bo'la olmaydi, bunda $convS = S_1(0)$. Birinchi misoldagi $P$ qavariq to'plam bo'ladi.

**$\Omega(E^n)$ fazo.** $E^n$ fazoning barcha bo'sh bo'lmagan kompakt qism to'plamlaridan tashkil topgan $\Omega(E^n)$ fazoni qaraylik. Xususan, barcha $S_r$(a) sharlar, $E^n$ fazoning nuqtalari, ya'ni {x} to'plamlar va h.k. lar $\Omega(E^n)$ fazoning elementlari bo'lib xizmat qilishi mumkin. $\Omega(E^n)$ fazoda odatiy nazariy-to'plamli amallardan tashqari yana ikkita amalni: qo'shish va songa ko'paytirish amallarini o'rganib chiqamiz.

$E^n$ fazosidan olingan ikkita bo'sh bo'lmagan A, B kompakt to'plamlarning, yoki boshqacha qilib aytganda, ikkita $A, B \in \Omega(E^n)$ elementlarning yig'indisi deb,

$$C = A + B = \{c = a + b : a \in A,\ b \in B\} \tag{2}$$

to'plamga aytiladi. Ravshanki, bunday holatda $C \in \Omega(E^n)$, ya'ni ikkita $A, B \in \Omega(E^n)$ to'plamlarning yig'indisi A+B bo'sh bo'lmagan, yopiq va chegaralangan to'plam bo'ladi. Xususan, agar A to'plam yagona nuqtadan tashkil topsa, ya'ni A={a} bo'lsa, u holda {a}+B to'plam B to'plamni a vektorga parallel ko'chirish natijasida hosil bo'ladi.

**Misol 2.** Ikkita ixtiyoriy sharning yig'indisi nimaga teng bo'lishini ko'raylik. Tadqiqotlar shuni ko'rsatdiki,

$$S_{r_1}(a_1)+S_{r_2}(a_2)=S_{r_1+r_2}(a_1+a_2), \qquad (3)$$

ya'ni ikkita sharlarni qo'shish natijasida ularning radiuslari hamda sharning markazlarini beruvchi vektorlar o'zaro qo'shilar ekan.

Ushbu tasdiqni (omilni), ya'ni, (3)-formulaningng chap va o'ng qismida turgan to'plamlar bir-biriga teng ekanligini (ustma-ust tushushini) isbotlaymiz. Agar, $c\in S_r(a_1)+S_r(a_2)$ bo'lsa, u holda, ikkita to'plamning yig'indisi to'g'risidagi ((2) ga qarang) ta'rifga ko'ra, $c=a+b$ bo'ladi, bu yerda $a\in S_{r_1}(a_1)$, $b\in S_{r_2}(a_2)$. Bundan, sharning ta'rifiga ((1) ga qarang) ko'ra,

$$\|a-a_1\|\le r_1, \quad \|a-a_2\|\le r_2,$$

larga ega bo'lamiz. Mazkur tengsizliklarni hisobga olgan holda,

$$\|x-(a_1+a_2)\|=\|a+b-a_1-a_2\|\le\|a-a_1\|+\|b-a_1\|\le r_1+r_2,$$

ya'ni, $c\in S_{r_1+r_2}(a_1+a_2)$ ni hosil qilamiz va bu (3)-formulani bir taraflama isbotidir. Endi, agar $c\in S_{r_1+r_2}(a_1+a_2)$ bo'lsa, u holda,

$$\lambda=\|c-a_1-a_2\|\le r_1+r_2,$$

bo'ladi. $\lambda_1+\lambda_2=\lambda$ munosabatni qanoatlantiruvchi $\lambda_1\le r_1$ *va* $\lambda_2\le r_2$ musbat sonlar mavjuddir. U holda,

$$a=a_1+\lambda_1\frac{c-a_1-a_2}{\lambda}\in S_{r_1}(a_1), \qquad b=a_2+\lambda_2\frac{c-a_1-a_2}{\lambda}\in S_{r_2}(a_2)$$

va bundan tashqari, $c=a+b$ bo'ladi. Demak, $c\in S_{r_1}(a_1)+S_{r_2}(a_2)$. Shunday qilib, (3)-formula to'liq isbotlandi.

Mazkur formulada $r_1=r$, $a_1=0$, $r_2=0$, $a_2=0$, deb olish natijasida

$$S_r(0)+\{a\}=S_r(a) \qquad (4)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Ixtiyoriy ikkita $A,B\in\Omega(E^n)$ to'plamlarga nisbatan algebraik yig'indi amali quyidagi :

$$A+B=B+A$$
$$A+(B+C)=(A+b)+C$$
$$A+\{0\}=A$$

xossalarga ega bo'lishini isbotlash qiyin emas. Mazkur xossalarni isbotlash o'quvchilarning o'ziga havola etiladi.

C to'plam A to'plamni $\lambda$ songa ko'paytmasi, deyiladi, agarda

$$C=\lambda A=\{c=\lambda a:\ a\in A\}$$

munosabat o'rinli bo'lsa.

**<u>Misol 3.</u>**

$$\lambda S_r(0)=S_{\lambda r}(0) \qquad (5)$$

ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatdan ham, agar $c\in\lambda S_r(0)$ bo'lsa, u holda $c=\lambda a$ bo'ladi, bu erda $a\in S_r(0)$. Bu holda, $\|c\|=\|\lambda a\|=|\lambda|\|a\|\le|\lambda|r$, ya'ni $c\in S_{|\lambda|r}(0)$. Va aksincha, agar, $c\in S_{|\lambda|r}(0)$ va $\lambda\neq 0$ ($\lambda=0$ da (5) formula shubhasiz bajariladi) bo'lsa, u holda, $a=\frac{1}{\lambda}c\in S_r(0)$ va $c=\lambda a$ bo'ladi. Shunday qilib, $c\in\lambda S_r(0)$, demak, formula (5) to'liq isbotlandi. (4) va (5) formulalardan, ixtiyoriy $S_r(a)$ sharni

$$S_r(a)=\{a\}+rS_1(0)$$

ko'rinishda ifodalash mumkinligiga ishonch hosil qilamiz. Shu bilan bir qatorda, bevosita, ixtiyoriy $\alpha,\beta$ sonlar va ixtiyoriy ikkita $A,B\in\Omega(E^n)$ to'plamlarga nisbatan

$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A,$$
$$1\cdot A=A$$
$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

xossalarning bajarilishi tekshiriladi.

$\Omega(E^n)$ fazoning kiritilgan ikki to'plamning algebraik yig'indi va to'plamni songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo bo'lmasligini ko'rsatamiz. Fazoning chiziqli bo'lishini ta'minlovchi qo'shish va ko'paytirish amallarining barcha xossalari ham mazkur holda bajarilavermas ekan. Aniqroq qilib aytganda,

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A \tag{6}$$

tenglik bajarilmaydi. Bunga qarama-qarshi bo'lgan misolni keltiramiz.

**Misol 4.** $A=S_1(0),\ \alpha=1,\ \beta=-1$ bo'lsin, u holda (5)-formulaga ko'ra,

$$\alpha A=1\ S_1(0)=S_1(0),\qquad \beta A=1\ S_1(0)=S_1(0)$$

hamda (3)-formulaga ko'ra, $\alpha A+\beta A=S_2(0)$. Lekin $(\alpha+\beta)A=(1-1)=A=0A=\{0\}$. Shunday qilib, $\{0\}\neq S_2(0)$, demak (6) formula noto'g'ri.

(6) formulada tenglikning o'rniga faqat bir tomonlama tegishlilik munosabati o'rinli bo'ladi: $(\alpha+\beta)A\subset\alpha A+\beta A$. Mazkur tegishlilikni isbotlashni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

$\Omega(E^n)$ fazoda metrika, yoki ikkita $A,B\in\Omega(E^n)$ to'plamlar o'rtasidagi *h(A,B)* masofani

$$h(A,B)=\min\{r\ge 0:\ \ A\subset B+S_r(0),\ \ B\subset A+S_r(0)\}$$

formula yordamida kiritish mumkin. Shunday qilib, ikkita $A,B\in\Omega(E^n)$ to'plamlar o'rtasidagi masofa, deb shunday musbat r sonlarning ichida eng kichigiki, bir vaqtning o'zida har ikkala

$$A\subset B+S_r(0),\ \ B\subset A+S_r(0) \tag{7}$$

tegishlilik munosabatlari bajariladi. Bunday metrika Hausdorf metrikasi deyiladi. *h(A,B)* masofaga misol ko'raylik.

**Misol 5.** $A=\{0\}$, $B=S_1(0)$- $E^n$ fazosidagi ikkita to'plam bo'lsin. Ixtiyoriy $r\ge 0$ larda $\{0\}\in S_1(0)+S_r(0)$ munosabat o'rinli bo'lganligi uchun (7)-dagi birinchi tegishlilik har doim bajariladi. Ikkinchi tegishlilik, ya'ni $S_1(0) \in S_r(0)$, $r \geq 1$, bo'lganda bajariladi. Shunday qilib, r ning (7) dagi tegishliliklar bir vaqtning o'zida bajarilishini ta'minlovchi minimal qiymati r=1 bo'ladi, ya'ni ushbu misolda h(A,B)=1.

Shunday qilib, $\Omega(E^n)$ metric fazodir. $h(A,B)$ funksiyaning masofa ekanligi, ya'ni u masofaning barcha aksiomalarini qanoatlantirishini isbotlash o'quvchining o'ziga havola etiladi.

**Masalalar.**

1. Har qanday $F \in \Omega(E^n)$ to'plam uchun F+F=2F tenglik bajariladimi?
2. $E^n$ fazosida olingan ikkita ixtiyoriy $A = S_{r_1}(a_1)$ va $B = S_{r_2}(a_2)$ sharlar orasidagi $h(A,B)$ masofa topilsin.

**Tayanch funksiyalar.** Qandaydir $F \in \Omega(E^n)$ to'plam berilgan bo'lsin. F to'plamning tayanch funksiyasi, deb

$$C(F,\psi) = \max_{f \in F}(f,\psi) \tag{8}$$

shart bilan aniqlanadigan $\psi \in E^n$ vektor argumentli $C(F,\psi)$ skalyar funksiyaga aytiladi, bu yerda $(f,\psi)$ ifoda $f,\psi \in E^n$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi. F to'plam shuningdek, $C(F,\psi)$ funksiyaning argumentlaridan biri hisoblanadi, ammo hozircha biz uni mahkamlangan (fikserlangan), deb hisoblaymiz. $C(F,\psi)$ tayanch funksiyasining F, to'plamga bog'liqligini keyinroq o'rganib chiqamiz. Shunday qilib, $C(F,\psi)$ funksiya $\psi$ argumentning funksiyasi sifatida $E^n$ fazoni $E^1$ son o'qiga akslantiradi. Biz buni quyidagi $C(F,\cdot): E^n \to E^1$ ko'rinishda yozamiz.

Tushunarliki, $(f,\psi)$ skalyar ko'paytma f bo'yicha uzluksiz bo'lganligi sababli (8) tenglikning o'ng tomoni maximumga erishadi, F esa kompakt to'plam bo'ladi. Aytaylik, $\psi_0 \in E^n$-qandaydir mahkamlangan vektor, $f_0$ esa $\psi = \psi_0$ vektor uchun (8) tayanch funksiyasi ta'rifidagi maksimumga erishtiruvchi F to'plamning elementlaridan biri, ya'ni quyidagi tenglik bajariladi

$$C(F,\psi_0) = \max_{f \in F}(f,\psi_0) = (f_0,\psi_0). \tag{9}$$

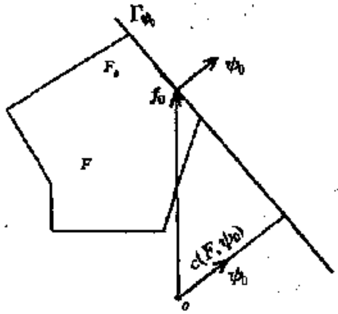
Bu holda, $\psi_0$ vektor $f_0$ nuqtadagi F to'plamning tayanch vektori deyiladi, (9) tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $f_0 \in F$ vektorlarning $F_0$ majmuasi esa, $\psi_0$ yo'nalishida F to'plamga tayanch to'plam, deb ataladi. $E^n$ fazosida

$$(x,\psi_0) = (f_0,\psi_0),$$

tenglama bilan aniqlanadigan $\Gamma_{\psi_0}$ gipertekislik $\psi_0$ vektor yo'nalishida F to'plamga tayanch gipertekislik, deb ataladi (22-rasm).

$\Gamma_{\psi_0}$ gipertekislik $E^n$ fazoni ikkita yarim fazolarga ajratadi. Barcha $f \in F$ nuqtalar uchun $(f,\psi_0) \leq (f_0,\psi_0)$ tengsizlik bajarilganligi sababli, F to'plam $\psi_0$

**vektorga nisbatan** manfiy yarim fazoda **yotibdi. Agar** $\psi_0 \in S$ bo'lsa, ya'ni $\psi_0$ **vector birlik uzunlikga** ega




22-rasm

bo'lsa, u holda $C(F,\psi_0)$ miqdor–mos ishorasi bilan olingan, 0 koordinata boshidan $\Gamma_{\psi_0}$ gipertekislikgacha bo'lgan masofa hisoblanadi. Bu tasdiq (9) tenglikdan kelib chiqadi. Bu tayanch funksiyaning geometrik ma'nosini anglatadi.

Tayanch funksiyalarni topishga doir bir nechta misollar keltiramiz.

**Misol 1.** F yagona nuqtadan tashkil topgan to'plam bo'lsin, ya'ni F={f}. U holda, tabiiyki,

$$C(\{f\},\psi) = (f,\psi) \qquad (10)$$

bo'ladi.

**Misol 2.** $E^n$ fazodagi markazi koordinata boshida bo'lgan birlik sharning tayanch funksiyasini hisoblaymiz. Agar $F=S_1(0)$ bo'lsa, u holda tushunarliki, (8) formuladagi maksimumga $f_0 = \frac{\psi}{\|\psi\|}$ vektorda erishadi. U holda biz quyidagiga

$$C(S_1(0),\psi) = (f_0,\psi) = (\frac{\psi}{\|\psi\|},\psi) = \|\psi\|$$

ega bo'lamiz.

**Misol 3.** $F = \{x \in E^2 : |x_1| \le 1, |x_2| \le 1\}$ shart bilan berilgan $E^2$ tekislikdagi F kvadratning tayanch funksiyasini hisoblaymiz.

Agar $\psi = (\psi_1,\psi_2)$ vector $E^2$ tekislikdagi birinchi kvadrantga tegishli bo'lsa, ya'ni $\psi_1 \ge 0, \psi_2 \ge 0$ bo'lsa, u holda (9) formuladagi maximumga $f_0=(1,1)$ vektorda erishiladi. Shunday qilib, $C(F,\psi) = (f_0,\psi) = \psi_1 + \psi_2$ bo'ladi, so'ngra, agar $\psi$ vector ikkinchi kvadrantga tegishli bo'lsa, ya'ni $\psi_1 \le 0, \psi_2 \ge 0$ bo'lsa, u holda (9) formuladagi maximumga $f_0=(-1,1)$ vektorda erishiladi va $C(F,\psi) = -\psi_1 + \psi_2$ bo'ladi. Shunga o'xshash, uchinchi va to'rtinchi kvadrantlarga mos ravishda tayanch funksiyalarning $C(F,\psi) = -\psi_1 - \psi_2$ va $C(F,\psi) = \psi_1 - \psi_2$

qiymatiga ega bo'lamiz. Bu barcha tayanch funksiyalar ko'rinishlarini birga jamlab , biz yakuniy

$$C(F,\psi)=|\psi_1|+|\psi_2| \qquad (11)$$

ga ega bo'lamiz.

***Tayanch funksiyalarning xossalari.***

**1-xossa.** $C(F,\cdot):E^n\to E^1$ tayanch funksiya ixtiyoriy $\psi\in E^n$ vektor va ixtiyoriy $\lambda\geq 0$ son uchun musbat birjinsli, ya'ni $C(F,\lambda\psi)=\lambda C(F,\psi)$ bo'ladi, xususan, C(F,o)=0.

Bu xossaning isboti bevosita (8) – tayanch funksiya ta'rifi va maximumning xossalaridan kelib chiqadi. Haiqatan ham,

$$C(F,\lambda\psi)=\max_{f\in F}(f,\lambda\psi)=\max_{f\in F}\lambda(f,\psi)=\lambda\max_{f\in F}(f,\psi)=\lambda C(F,\psi).$$

**2-xossa.** Ixtiyoriy ikkita $\psi_1,\psi_2\in E^n$ vektorlar uchun $C(F,\psi)$ tayanch funksiya quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi

$$C(F,\psi_1+\psi_2)\leq C(F,\psi_1)+C(F,\psi_2)$$

Bu xossaning isboti ham bevosita tayanch funksiya ta'rifi va maximumning xossasidan kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$C(F,\psi_1+\psi_2)=\max_{f\in F}(f,\psi_1+\psi_2)=\max_{f\in F}[(f,\psi_1)+(f,\psi_2)]\leq\max_{f\in F}(f,\psi_1)+\max_{f\in F}(f,\psi_2)=C(F,\psi_1)+C(F,\psi_2)$$

.

**3-xossa.** $A,B\in\Omega(E^n)$ bo'lsin. U holda A+B yig'indining $C(A+B,\psi)$ tayanch funksiyasi ikkita $C(A,\psi)$ va $C(B,\psi)$ tayanch funksiyalar yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$C(A+B,\psi)=C(A,\psi)+C(B,\psi).$$

**Isboti.** Ikkita to'plam yig'indisining ta'rifiga ko'ra, (asosiy tushunchalar mavzusidagi ta'rifga qarang), biz

$$A+B=\{f=a+b:a\in A,b\in B\}$$

ga egamiz. Endi, (1) – tayanch funksiyasining ta'rifidan foydalanib, quyidagini olamiz

$$C(A+B,\psi)=\max_{f\in A+B}(f,\psi)=\max_{\substack{a\in A\\ b\in B}}(a+b,\psi)=\max_{a\in A}(a,\psi)+\max_{b\in B}(b,\psi)=C(A,\psi)+C(B,\psi$$

Bu 3-xossa isbotini yakunlaydi.

Endi A $(n\times n)$ o'lchovli matrisa va $F\in\Omega(E^n)$ bo'lsin. F to'plamning A chiziqli almashtirishdagi AF obrazi, deb quyidagi to'plamga aytiladi

$$AF=\{x\in E^n:x=Af,f\in F\}. \qquad (12)$$

A chiziqli almashtirishda $F$ to'plam obrazining tayanch funksiyasi qanday ifodalanishini ko'rib chiqamiz.

**4-xossa.** $A$-$(n\times n)$ o'lchamli matrisa va $F\in\Omega(E^n)$ bo'lsin. U holda,

$$C(AF,\psi)=C(F,A^*\psi),$$

bu yerda A* - A matrizaga qo'shma matrisa.

Bu xossaning isboti (8) – tayanch funksiya va (12) to'plam obrazi ta'riflaridan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$C(AF,\psi)=\max_{x\in AF}(x,\psi)=\max_{f\in F}(Af,\psi)=\max_{f\in F}(f,A^*\psi)=C(F,A^*\psi).$$

**5-xossa.** $F\in\Omega(E^n)$, $\lambda$ ixtiyoriy son bo'lsin. U holda $C(\lambda F,\psi)=C(F,\lambda\psi)$.

Bu xossa 4-xossaning A matrisa $A=\lambda E$ ko'rinishda bo'lgandagi xususiy holi hisoblanadi, bu yerda E $(n\times n)$ o'lchovli birlik matrisa.

**5-xossaning natijasi.** $C(F,\psi)$ tayanch funksiya F – birinchi argument bo'yicha musbat bir jinsli, ya'ni ixtiyoriy $\lambda\geq 0$ son uchun $C(\lambda F,\psi)=\lambda C(F,\psi)$.

Bu natijani isbotlash uchun 1-xossadan foydalanish yetarli .

**Misol 4.** $E^n$ fazodagi ixtiyoriy $S_r(a)$ sharning tayanch funksiyasini hisoblaymiz. Yuqorida $S_r(a)$ shar $S_r(a)=\{a\}+rS_1(0)$ ko'rinishda bo'lishligi ko'rsatilgan. $\{a\}$ to'plam va $S_1(0)$ birlik sharning tayanch funksiyalarini hisoblab topganmiz. 3-xossa va 5-xossa natijasiga ko'ra , biz quyidagini olamiz

$$c(S_2(a),\psi)=C(\{a\}+rS_1(0),\psi)=C(\{a\},\psi)+rC(S_1(0),\psi)=(a,\psi)+r\|\psi\|.$$

**Misol 5.** $E^2$ tekislikda tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan ixtiyoriy G to'g'ri to'rtburchakning tayanch funksiyasini hisoblaymiz. Bu to'g'ri to'rtburchak quyidagi $G=\{x\in E^2:a_1\leq x_1\leq b_1,a_2\leq x_2\leq b_2\}$ ko'rinishda berilgan bo'lsin. G to'g'ri to'rtburchakning mos siljitishlar va kengaytirishlar yordamida 3-misoldagi berilgan quyidagi kvadratdan olamiz

$$F=\{x\in E^2:|x_1\leq 1|,|x_2|\leq 1\}.$$

Biz quyidagiga egamiz

$$G=\{(\frac{b_1+a_1}{2},\frac{b_2+a_2}{2})+\begin{pmatrix}\frac{b_1-a_1}{2} & 0\\ 0 & \frac{b_2-a_2}{2}\end{pmatrix}F\}.$$

So'ngra, **3 va 4** xossalar hamda (10) va (11) formulalarga ko'ra **quyidagini** olamiz

$$C(G,\psi)=\frac{b_1+a_1}{2}\psi_1+\frac{b_2+a_2}{2}\psi_2+\frac{b_1-a_1}{2}|\psi_1|+\frac{b_2-a_2}{2}|\psi_2|.$$

Shunday qilib, biz ixtiyoriy $F\in\Omega(E^n)$ to'plam uchun (8) formulaga ko'ra, $C(F,\psi)$ tayanch funksiyani aniqladik. Tabiiyki savol tug'iladi, $C(F,\psi)$ tayanch funksiya bo'yicha F to'plamning o'zini tiklash mumkinmi? $C(F,\psi)$ tayanch funksiyaga ko'ra, faqatgina F to'plamning convF qavariq qobig'ini tiklash mumkin ekan. Bu tasdiq isbotsiz quyidagi xossa ko'rinishida keltiriladi.

**6-xossa.** $F\in\Omega(E^n)$ to'plam va uning $C(F,\psi)$ tayanch funksiyasi berilgan bo'lsin. U holda F to'plamning qavariq qobig'ini quyidagi ko'rinishda ifoda qilsa bo'ladi

$$convF = \bigcap_{\psi\in S}\{f \in E^n : (f,\psi) \le C(f,\psi)\} \tag{13}$$

Shunday qilib, keyinchalik to'plam uchun qandaydir munosabatlarga ega bo'lsak, tayanch funksiyalar uchun ham mos munosabatlarni yoza olamiz. Boshqa tomondan, tayanch funksiyalar uchun qandaydir munosabatlarga ega bo'lsak, biz faqat to'plamning qavariq qobig'i uchungina shunga o'xshash munosabatlarni olishimiz mumkin ekan. Bunday vaziyat quyida keltiriladigan xossalarda xarakterli namoyon bo'ladi.

**7-xossa.** $A,B \in \Omega(E^n)$ bo'lsin. Agar A=B bo'lsa, u holda

$$C(a,\psi) = C(B,\psi)\,. \tag{14}$$

Boshqa tomondan, agar $C(A,\psi)$ va $C(B,\psi)$ tayanch funksiya ustma-ust tushsa, ya'ni (14) shart bajarilsa, u holda $convA = convB$ bo'ladi.

**Isbot.** 1-tasdiq tabiiy ravishda (8) formuladan, ikkinchisi esa (8) formuladan kelib chiqadi.

**7- xossaning natijasi.** $A,B \in \Omega(E^n)$ qavariq to'plamlar faqat va faqat shu holda, teng bo'ladiki, qachonki ularning tayanch funksiyalari ustma-ust tushsa.

**8-xossa.** $A,B \in \Omega(E^n)$ bo'lsin. Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda

$$C(A,\psi) \le C(B,\psi)\,. \tag{15}$$

bo'ladi. Boshqa tomondan, agar (15) munosabat bajarilsa, u holda $convA \subset convB$ bo'ladi.

**Isbot.** 1-tasdiq tabiiy ravishda (8) formuladan; 2-tasdiq esa (8) formuladan kelib chiqadi.

**8-xossaning natijasi.** 2 ta $A,B \in \Omega(E^n)$ qavariq to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda $A \subset B$ bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki $C(A,B) \le C(B,\psi)$ bo'lsa.

**9-xossa.** $F \in \Omega(E^n)$ bo'lsin. Agar $f \in F$ bo'lsa, u holda

$$(f,\psi) \le C(F,\psi) \tag{16}$$

bo'ladi.

Boshqa tomondan, agar (16) munosabat bajarilsa, u holda $f \in convF$ bo'ladi. Bu xossaning isboti bevosita 8-xossa va (10) formuladan kelib chiqadi.

**9-xossaning natijasi.** f nuqta $F \in \Omega(E^n)$ qavariq to'plamga tegishli bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki, $(f,\psi) \le C(F,\psi)$ bo'lsa.

Ta'kidlab o'tish lozimki, agar F to'plam qavariq bo'lmasa, u holda, (16) munosabat bajarilishidan umuman aytganda, $f \in F$ ekanligi kelib chiqmaydi. Misol keltiramiz.

**Misol 6.** F to'plam $E^n$ fazoda birlik sfera bo'lsin, ya'ni F=S, f=0 bo'lsin. U holda $(f,\psi) = 0$, $C(F,\psi) = \|\psi\|$ bo'ladi. Shunday qilib (16) munosabat bajariladi, chunki $0 \le \|\psi\|$, ammo $0 \notin S$.

**10-xossa.** $F \in \Omega(E^n)$ bo'lsin. Agar $f \in \operatorname{int} F$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun

$$(f,\psi) < C(F,\psi) \tag{17}$$

bo'ladi.

Boshqa tomondan, agar (17) munosabat ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun bajarilsa, u holda $f \in \operatorname{int} convF$ bo'ladi.

**Isbot.** $f \in \operatorname{int} F$ bo'lsin. Unda shunday $\varepsilon > 0$ mavjudki, $S_\varepsilon(f) \subset F$ o'rinli bo'ladi. Bu yerda 8-xossaga ko'ra, $\psi \in E^n$ vektor uchun, xususan $\psi \in S$ uchun quyidagi munosabatni olamiz

$$C(S_\varepsilon(f),\psi) \le C(F,\psi).$$

Olingan tengsizlikga (4-misolga qarang) $S_\varepsilon(f)$ sharning tayanch funksiyalari ifodasini qo'yib, ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun quyidagini olamiz:

$$(f,\psi) + \varepsilon \|\psi\| \le C(F,\psi).$$

Shunday qilib, (12) munosabat $\psi \in S$ vektor uchun bajariladi. 10-xossaning boshqa tomonga isboti bu yerda keltirilmaydi.

**10-xossaning natijasi.** $f$ nuqta $F \in \Omega(E^n)$ qavariq to'plamning ichkisiga faqat va faqat shu holda tegishli bo'ladiki, qachonki ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun $(f,\psi) < C(F,\psi)$ bo'lsa.

**11-xossa.** $A, B \in \Omega(E^n)$ bo'lsin. Agar $A \cap B \ne \emptyset$ bo'lsa, u holda

$$C(A,\psi) + C(B,-\psi) \ge 0 \tag{18}$$

bo'ladi. Boshqa tomondan, agar (18) munosabat bajarilsa, u holda $convA \cap convB \ne \emptyset$ bo'ladi.

**Isbot.** Avval $A \cap B \ne \emptyset$ faqat va faqat

$$0 \in A + (-1)B \tag{19}$$

bo'lgandagina to'g'riligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, $A \cap B \ne \emptyset$ va $f \in A \cap B$ bo'lsin. U holda $f \in A$ va $f \in A$, ya'ni $-f \in (-1)B$. Boshqa tomondan, $0 = b + (-f) \in A + (-1)B$ bo'lsin. U holda, to'plamlarning yig'indisining ta'rifiga asosan, $0 \in a + (-1)b$ bo'ladi, b yerda $a \in A$, $b \in B$. Shunday qilib , $a \in A$ $a = b \in B$, ya'ni $A \cap B \ne \emptyset$.

Endi, $A, B \in \Omega(E^n)$ va $A \cap B \ne \emptyset$ bo'lsin. (19) munosabatga 9-xossani qo'llab, quyidagini olamiz:

$$0 = (0,\psi) \le C(A + (-1)B, \psi).$$

Bu yerdan 3 va 5 xosslarga ko'ra , quyidagini olamiz:

$$0 \le C(A + (-1)B,\psi) = C(A,\psi) + C((-1)B,\psi) = C(A,\psi) + C(B,-\psi),$$

ya'ni (17) munosabat bajarildi.

11-xossani boshqa tomondan isbotlaymiz. (17) munosabat bajarilsin. U holda 3 va 5 xossalar bo'yicha quyidagiga egamiz

$$C(A + (-1)B,\psi) = C(A,\psi) + C(B,-\psi) \ge 0.$$

Bu yerdan 9-xossaga ko'ra,

$$0 \in conv(A + (-1)B) = convA + (-1)convB$$

ekanligini topamiz. (18) formuladan $convA \cap convB \ne \emptyset$ ekanligini olamiz. Shunday qilib, 11 - xossa to'la isbotlandi.

**11- xossaning natijasi.** Ikkita $A,B\in\Omega(E^n)$ qavariq to'plamlar kesishadi, faqat va faqat shu holdaki, agar, $C(A,\psi)+C(B,-\psi)\geq 0$ bo'lsa.

**Masalalar.**

1. n o'lchovli $F=\{x\in E^n : |x_i|\leq 1, i=1,...,n\}$ kubning tayanch funksiyasi topilsin.
2. ixtiyoriy n o'lchovli qirralari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan $G=\{x\in E^n : a_i\leq x_i\leq b_i, i=1,...,n\}$ parallelepipedning tayanch funksiyasi topilsin.
3. $E^2$ tekislikda $F=\{x\in E^2 : |x_1+x_2|\leq 1\}, |x_1-x_2|\leq 1$ formula bilan berilgan F to'plamning tayanch funksiyasi topilsin.
4. $E^2$ tekislikda $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$ tenglama bilan berilgan ellipsning tayanch funksiyasi topilsin.
5. 11-xossa yordamida ixtiyoriy ikkita $S_{r_1}(a_1)$ va $S_{r_2}(a_2)$ sharning kesishishi uchun zaruriy va yetarli shart topilsin.

## 16 §. Uzluksiz funksiyalar

$X_1$ va $X_2$ – 2 ta o'lchamli metrik fazolar, $\rho_1(a,b)$ va $\rho_2(a,b)$ lar esa - mos ravishda $X_1$ va $X_2$ fazolardagi metric funksiyalar, ya'ni a va b nuqtalar orasidagi masofani beruvchi funksiyalar bo'lsin. $f:X_1\to X_2$ $X_1$ fazoni $X_2$ fazoga akslantiruvchi qandaydir funksiya bo'lsin. $X_1$ va $X_2$ fazolarda masofalar berilganligi tufayli f funksiyaning uzluksizligi tushunchasi tabiiy ravishda kiritiladi. $f:X_1\to X_2$ funksiya $x_0\in X_1$ nuqtada uzluksiz deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lsaki, $\rho(x,x_0)<\delta$ bo'lganda $\rho_2(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ bo'lsa. Keyinchalik f funksiya shunchaki uzluksiz deyiladi, agar u ixtiyoriy $x_0\in X_1$ nuqtada uzluksiz bo'lsa. f funksiya uchun Lipshits sharti ham shunga o'xshash kiritiladi. $f:X_1\to X_2$ funksiya Lipshits shartini L o'zgarmas bilan qanoatlantiradi, agar ihtiyoriy ikkita $x,y\in X_1$ nuqtalar uchun quyidagi tengsizlik bajarilsa

$$\rho_2(f(x),f(y))\leq L\rho_1(x,y)$$

Tushunarliki, qandaydir L o'zgarmas bilan Lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiya uzluksiz bo'ladi. Berilgan ushbu ta'rifni bir metrik fazoni boshqasiga akslantiruvchi ixtiyoriy funksiyalar uchun qo'llash mumkinligini ta'kidlab o'tish lozim.

**Misol 1.** $C(F,\psi)$ tayanch funksiyani ikkinchi argumentni funksiyasi, deb ko'rib chiqamiz. Qandaydir $F\in\Omega(E^n)$ to'plamni fikserlaymiz (mahkamlaymiz). U holda $C(F,\psi):E^n\mapsto E^1$ funksiya L o'zgarmas bilan Lipshits shartini qanoatlantiradi, agarda ixtiyoriy ikkita $\psi_1,\psi_2\in E^n$ nuqtalar uchun quyidagi tengsizlik bajarilsa

$$|C(F,\psi_1)-C(F,\psi_2)|\leq L\|\psi_1-\psi_2\|.$$

$C(F_1): E^n \to E^1$ funksiyalarga qo'llash uchun umumiy uzluksizlik tushunchasi ham shunga o'xshash kiritiladi.

**Misol 2.** $C(F,\psi)$ tayanch funksiyani birinchi argument funksiyasi sifatida ko'rib chiqamiz. Qandaydir $\psi \in E^n$ vektorni mahkamlaymiz. U holda $C(,\psi): \Omega(E^n) \to E^1$ funksiya L o'zgarmas bilan Lipshits shartini qanoatlantiradi, agarda ixtiyoriy ikkita $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$ to'plamlar uchun quyidagi tengsizlik bajarilsa

$$|C(F_1,\psi) - C(F_2,\psi)| \leq L\, h(F_1,F_2).$$

$C(F,\cdot): \Omega(E^n) \to E^1$ funksiyalarga qo'llash uchun ham uzluksizlikning umumiy tushunchasi shunga o'xshash kiritiladi.

$F \in \Omega(E^n)$ bo'lsin. F to'plamning moduli, deb |F|=h({0},F) ifoda bilan aniqlanuvchi |F| songa aytiladi. Shunday qilib, h(A,B) xansdorf metrikasi ta'rifiga ko'ra F to'plamning |F| moduli F to'plamni o'z ichiga oluvchi markazi koordinatalar boshida bo'lgan eng kichkina sharning radiusidir. Bu erda |F| to'plamning moduli norma hisoblanmasligini, ya'ni $\Omega(E^n)$ fazo $|F|: \Omega(E^n) \to E^1$ funksiya orqali normallashgan fazo bo'la olmaydi.

**Lemma 1.** $F \in \Omega(E^n)$ bo'lsin. U holda $C(F,\psi)$ tayanch funksiya $\psi$ bo'yicha L=|F| o'zgarmas bilan Lipshits shartini qanoatlantiradi.

**Isbot.** Biz ixtiyoriy ikkita $\psi_1, \psi_2 \in E^n$ vektorlar uchun quyidagi tengsizlikni isbotlashimiz kerak bo'ladi (1-misolga qarang)

$$|C(F,\psi_1) - C(F,\psi_2)| \leq |F| \, \| \psi_1 - \psi_2 \|. \tag{1}$$

|F| to'plam modulining ta'rifiga ko'ra, $F \subset S_{|F|}(0)$ bajariladi. Bu yerdan, tayanch funksiyaning 8 – xossasi bo'yicha quyidagiga ega bo'lamiz

$$C(F,\psi) \leq C(S_{|F|}(0),\psi) = |F| \cdot \|\psi\|. \tag{2}$$

Endi $\psi_1, \psi_2$ lar $E^n$ fazodan olingan ikkita ixtiyoriy vektorlar bo'lsin. U holda tayanch funksiyaning 2 –xossasiga ko'ra , quyidagiga ega bo'lamiz

$$C(F,\psi_1) = C(F,\psi_1 - \psi_2 + \psi_2) \leq C(F,\psi_1 - \psi_2) + C(F,\psi_2).$$

Bu yerdan, (2) – formulani hisobga olgan holda, quyidagini topamiz

$$C(F,\psi_1) - C(F,\psi_2) \leq C(F,\psi_1 - \psi_2) \leq |F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

$\psi_1$ va $\psi_2$ vektorlar ixtiyoriy bo'lganligi uchun, ularning o'rnini almashtirish olingan tenglikni o'zgartirmaydi. Shunday qilib,

$$C(F,\psi_2) - C(F,\psi_1) \leq |F| \, \|\psi_2 - \psi_1\|.$$

Bu ohirgi ikkita tengsizlikdan (1) munosabatni olamiz. Shunday qilib, 1 –lemma isbotlandi.

**1-lemmaning natijasi.** $C(F,): E^n \to E^1$ funksiyalar uzluksiz.

**Lemma 2.** $C(F,\psi)$ tayanch funksiya $L = \|\psi\|$ o'zgarmas bilan F bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantiradi.

**Isbot.** Biz ixtiyoriy ikkita $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$ to'plam uchun quyidagi tengsizliklarni isbotlashimiz kerak

$$|C(F_1,\psi) - C(F_2,\psi)| \leq \|\psi\| \, h(F_1,F_2), h(F_1,F_2) \tag{3}$$

Xausdorf metrikasi $h(F_1,F_2)$ ta'rifiga ko'ra biz quyidagiga egamiz $F_1 \subset F_2 + S_{h(F_1,F_2)}(0)$.

Bu yerdan tayanch funksiyaning 8-xossasiga ko'ra ihtiyoriy $\psi \in E^n$ vector uchun

$$C(F_1,\psi) \le C(F_2,\psi) + h(F_1,F_2)\|\psi\|$$

tengsizlik bajarilishi kelib chiqadi. Shunday qilib, $C(F_1,\psi) - C(F_2,\psi) \le \|\psi\| h(F_1,F_2)$. $F_1,F_2$ to'plamlar ixtiyoriy bo'lgani uchun ularning o'rnini almashtirish olingan tengsizlikni o'zgartirmaydi, ya'ni $C(F_1,\psi) - C(F_2,\psi) \le \|\psi\| h(F_1,F_2)$.

Bu oxirgi ikkita tengsizlikdan (3) munosabatga ega bo'lamiz. Shunday qilib, 2-lemma isbotlandi.

**2-lemma natijasi.** $C(\cdot,\psi) : \Omega(E^n) \to E^1$ funksiya uzluksiz.

**3-lemma.** $F_1,F_2 \in \Omega(E^n)$ lar ikkita qavariq to'plam bo'lsin. U holda

$$h(F_1,F_2) = \max_{\psi \in S} |C(F_1,\psi) - C(F_2,\psi)|. \tag{4}$$

**Isbot.** $F_1,F_2 \in \Omega(E^n)$ bo'lsin. 2-lemmaga ko'ra, $|C(F_1,\psi) - C(F_2,\psi)| \le \|\psi\| h(F_1,F_2)$ tengsizlik ixtiyoriy $\psi \in E^n$ vector uchun bajariladi. Bundan, biz ixtiyoriy $\psi \in S$ vektorlar uchun quyidagiga ega bo'lamiz: $|C(F_1,\psi) - C(F_2,\psi)| \le h(F_1,F_2)$. Shunday qilib, $\max_{\psi \in S} |C(F_1,\psi) - C(F_2,\psi)| \le h(F_1,F_2)$,

ya'ni (4) formula bir tomonga isbotlandi. Boshqa tomondan isbotlash uchun teskarisini faraz qilamiz, ya'ni

$$\max_{\psi \in S} |C(F_1,\psi) - C(F_2,\psi)| < h(F_1,F_2).$$

U holda shunday $\varepsilon > 0$ mavjudki, $\max_{\psi \in S} |C(F_1,\psi) - C(F_2,\psi)| \le h(F_1,F_2) - \varepsilon$ bo'ladi.

$$\lambda = h(F_1,F_2) - \varepsilon \tag{5}$$

almashtirishni bajarib, biz oxirgi tengsizlikdan ixtiyoriy $\psi \in S$ vector uchun quyidagini olamiz

$$|C(F_1,\psi) - C(F_2,\psi)| \le \lambda.$$

Bu munosabatda modul belgisini ochib va $\lambda$ ni $\|\psi\|$ ga ko'paytirib, ixtiyoriy $\psi \in S$ vector uchun quyidagi ikkita tengsizlikga ega bo'lamiz

$$C(F_1,\psi) \le C(F_2,\psi) + \lambda\|\psi\|, \quad C(F_2,\psi) \le C(F_1,\psi) + \lambda\|\psi\|.$$

Tayanch funksiyalarning birinchi xossasiga ko'ra, bu tengsizliklar ixtiyoriy $\psi \in E^n$ vector uchun bajariladi. Shunday qilib, $F_1,F_2$ to'plamlarni qavariq ekanligini hisobga olib, biz tayanch funksiyalarning 8–xossasida keltirilgan natijaga ko'ra, quyidagini olamiz

$$F_1 \subset F_2 + S_\lambda(0), F_2 \subset F_1 + S_\lambda(0).$$

Xausdorf masofasi ta'rifiga ko'ra, $h(F_1,F_2) \le \lambda$ kelib chiqadi. Bu esa $\lambda$ sonni aniqlanishiga zid ((5) ga qarang). Shunday qilib, (4) formula to'liq isbotlandi.

Ta'kidlab o'tishimiz lozimki, agar $F_1$ va $F_2$ to'plamlar qavariq bo'lmasa, u holda (4) formula bajarilmasligi mumkin. Bunga zid bo'lgan misol keltiramiz.

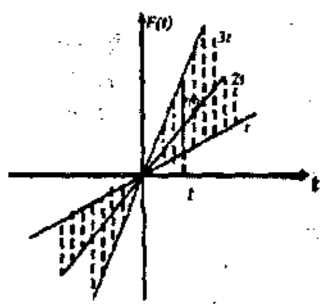
**Misol 3.** n=2, $F_1$ to'plam ikkita $a_1=(1,0)$ va $b_1=(-1,0)$ nuqtalardan tashkil topgan, $F_2$ to'plam esa ikkita $a_2=(0,1)$ va $b_2=(0,-1)$ nuqtalardan tashkil topgan bo'lsin. U holda, bevosita $h(F_1,F_2)=\sqrt{2}$ ekanligi tekshiriladi. Boshqa tomondan,
$C(F_1,\psi)=|\psi_1|$,
$C(F_2,\psi)=|\psi_2|$. Bundan quyidagi kelib chiqadi

$$\max_{\psi\in S}|C(F_1,\psi)-C(F_2,\psi)|=\max_{\psi\in S}||\psi_1|-|\psi_2||=1$$

Shunday qilib, bu holda (4) formula to'g'ri emas.

**Ko'p qiymatli akslantirishlar.** Ko'p qiymatli akslantirish, deb ixtiyoriy $F:E'\to\Omega(E'')$ funksiyani, ya'ni argumentlari son bo'lgan funksiyalarni, qiymatlari, deb esa $E''$ fazodan olingan bo'sh bo'lmagan kompakt to'plamlar bo'lgan $\Omega(E'')$ fazoning elementlarini ataymiz. $E'$, $\Omega(E'')$ lar metrik fazolar bo'lganligi uchun uzluksizlikning umumiy ta'rifini bu ko'p qiymatli akslantirishlarga qo'llash mumkin. Aynan, F(t) ko'pqiymatli akslantirish $t_0$ nuqtada uzluksiz, agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ mavjud bo'lsaki, faqat $|t-t_0|<\delta$ bo'lganda $h(F(t),F(t_0))<E$ bo'lsa. Keyin, F(t) ko'p qiymatli akslantirish shunchaki uzluksiz, agar u ixtiyoriy $t_0\in E^1$ nuqtada uzluksiz bo'lsa.

**Misol 4.** $F(t)=S_{|t|}(2t)$ munosabat bilan aniqlangan $F:E'\to\Omega(E')$ ko'p qiymatli akslantirishni ko'rib chiqamiz, ya'ni har bir $t\in E'$ uchun F(t) to'plam $E'$ fazodagi markazi a=2t nuqtada, radiusi r=|t| bo'lgan shar. Bu ko'p qiymatli akslantirishning grafigi quyidagi 23-rasmda keltirilgan




23-rasm

Bevosita F(t) akslantirishni uzluksiz ekanligi tekshiriladi. Yana bir ta'rifni keltiramiz. $X_1$,$X_2$ lar mos ravishda $\rho_1(a,b)$ va $\rho_2(a,b)$ metrikali metrik fazolar, Y – qandaydir
to'plam va $f:X_1\times Y\to X_2$ bo'lsin. f(x,y) funksiya x bo'yicha $y\in Y$ uchun $x_0$ nuqtada tekis uzluksiz deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$

mavjud bo'lsaki, barcha $y \in Y$ uchun $\rho_1(x_1, x_0) < \delta$ bo'lganda $\rho_2(f(x,y), f(x_0,y)) < E$ bo'lsa.

**Lemma 4.** $F: E' \to \Omega(E^n)$ - uzluksiz ko'pqiymatli akslantirish bo'lsin. U holda $C(F(t),\psi)$ tayanch funksiya har bir mahkamlangan $\psi \in E^n$ da t bo'yicha uzluksiz. Bundan tashqari, $C(F(t),\psi)$ funksiya $\psi \in S$ uchun t bo'yicha tekis uzluksiz. Boshqa tomondan , agar $C(F(t),\psi)$ funksiya $\psi \in S$ uchun t bo'yicha tekis uzluksiz bo'lsa, u holda convF(t) ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz bo'ladi.

**Isboti.** $F: E' \to \Omega(E^n)$ ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz bo'lsin. $C(,\psi): \Omega(E^n) \to E'$ tayanch funksiya 2-lemma natijasiga ko'ra, uzluksiz. Shu tariqa, $C(F(.),\psi): E' \to E'$ akslantirish ikkita uzluksiz akslantirishlar superpozitsiyasi kabi uzluksiz. Bundan tashqari, agar $\psi \in S$ bo'lsa, u holda 2-lemmaga ko'ra, biz quyidagiga ega bo'lamiz $|C(F(t),\psi) - C(F(t_0),\psi)| \le h(F(t), F(t_0))$. Bu yerdan, $C(F(t),\psi)$ tayanch funksiyasini $\psi \in S$ uchun t bo'yicha tekis uzluksizligi kelib chiqadi. Shunday qilib, lemma bir tomonga isbotlandi.

Endi, $C(F(t),\psi)$ funksiya $\psi \in S$ uchun t bo'yicha tekis uzluksiz bo'lsin. U holda $C(convF(t),\psi) = C(F,\psi)$ funksiya ham $\psi \in S$ uchun t bo'yicha tekis uzluksiz bo'ladi. 3-lemmaga ko'ra, biz quyidagiga egamiz

$$h(convF(t), convF(t_0)) = \max_{\psi \in S} |C(convF(t),\psi) - C(convF(t_0),\psi)|.$$

Bu yerdan convF(t) ko'p qiymatli akslantirishning uzluksizligi kelib chiqadi. Shunday qilib, 4 – lemma to'liq isbotlandi.

**4–lemmaning natijasi.** $F: E' \to \Omega(E^n)$ ko'p qiymatli akslantirish shundayki, F(t) to'plam barcha $t \in E'$ lar uchun qavariq bo'lsin. U holda, F(t) ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, agar, $C(F(t),\psi)$ tayanch funksiya $\psi \in S$ uchun t bo'yicha tekis uzluksiz bo'lsa.

**Masalalar.**

1. Isbotlang: F(t)=$S_{r(t)}$ (a(t)) shart bilan aniqlangan $F: E' \to \Omega(E^n)$ **ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, agarki** $r: E' \to E'$ va $a: E' \to E^n$ funksiya uzluksiz bo'lsa.

2. $F(t) = S_{\min\{1, \frac{1}{t}\}}(0)$ ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz bo'ladimi?

## 17 §. O'lchovlilik

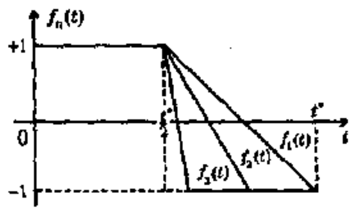
Biz shu paytgacha faqatgina uzluksiz funksiyalar bilan ishladik. Ammo optimal boshqaruvning matematik nazariyasida barcha uzluksiz funksiyalar sinfidan ko'ra, ancha keng funksiyalar sinfini ko'rib chiqishga to'g'ri keladi. Bu qismari shu bilan tushuntiriladiki, uzluksiz funksiyalar fazosi nuqtali yaqinlashishga nisbatan yopiq emas. Misolda aniqlashtiramiz:

**Misol 1.**

$$f_n(t)=\begin{cases}+1, agar\, 0\le t\le \dfrac{t^*}{2},\\ -\dfrac{2^{n+1}}{t^*}t+2^n+1, agar\, \dfrac{t^*}{2}\le t\le (\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^n})t^*,\\ -1, agar\, (\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^n})t^*\le t\le t^*\end{cases}$$

Shart bilan $[0,\ t^*]$ vaqt kesmasida aniqlangan $f_n: E^r \to E^r$ uzluksiz funksiyalar ketma-ketligini ko'rib chiqamiz.

Bu funksiyalarning grafigi 24-rasmda keltirilgan:




24-rasm

Ravshanki, ixtiyoriy $t\in[0,t^*]$ uchun $f_n(t)$ ketma-keltik qandaydir f(t) qiymatga yaqinlashadi. Bu f(t) limitli funksiya endi uzluksiz bo'lmaydi, balki $t=\frac{t^*}{2}$ da uzilishga ega bo'ladi. f(t) funksiya quyidagi munosabat bilan aniqlanadi

$$f(t)=\begin{cases}+1, agar\, 0\le t\le \dfrac{t^*}{2},\\ -1, agar\, \dfrac{t^*}{2}< t\le t^*\end{cases}$$

Shunday qilib, uzluksiz funksiyalar ketma-ketligining nuqtali limiti endi uzlukli funksiya bo'lishi mumkin. Biz shunday funksiyalar fazosini kiritganimiz ma'qulki, bu fazoning ixtiyoriy funksiyalar ketma-ketligining limiti ham shu fazoga tegishli bo'lsin.

Misolda nima uchun optimal boshqaruv nazariyasida uzluksiz funksiyalar sinfisiz ish yuritib bo'lmasligini ko'rsatamiz. Eng sodda optimal boshqaruv masalalarida ham u(t) boshqaruv funksiyasi uzluksiz bo'lmasligi mumkin ekan.

**Misol 2.** A bekatdan B bekatga $\ddot{x}=u$ tenglama bilan harakatlanayotgan poyezdni ko'rib chiqamiz. Bu yerda x A bekatdan poyezdgacha bo'lgan masofa, U esa – boshqarish mumkin bo'lgan poyezdning tortish kattaligi, ya'ni u ni u(t) vaqtning funksiyasi qilib tanlash mumkin. U(t) tortish kattaligiga $|u(t)|\le 1$cheklov qo'yilgan. A va B bekatlar orasida masofa berilgan. u(t) boshqaruvni shunday tanlash kerakki, poyezd bekatlar orasidagi masofani eng kam $t^*$ vaqtda bosib o'tsin. Buning ustiga albatta poyezdning boshlang'ich va oxirgi vaqt momentidagi tezliklari nol bo'lishi kerakligi nazarda tutiladi, ya'ni $\dot{x}(0)=\dot{x}(t^*)=0$. Poyezd yo'lning yarmigacha maksimal tezlanish bilan yurganda, o'tish vaqti minimal bo'lishini, ya'ni u(t)=+1; keyin esa yo'lning ikkinchi yarmida maksimal to'xtatishini, ya'ni u(t)=-1 bo'lishini fahmlash qiyin emas. Shunday qilib, bu vaziyatda u*(t) optimal boshqaruv quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$u^*(t)=\begin{cases}+1, agar 0\le t\le \frac{t^*}{2},\\ -1, agar \frac{t^*}{2}<t\le t^*,\end{cases}$$

ya'ni, uzlushli funksiya bo'ladi. Bu u*(t) funksiya uzluksiz funksiyalar ketma-ketligining limiti safatida olingan 1-misoldagi f(t) funksiya bilan ustma-ust tushadi.

Shunday qilib, 2-misoldagi u*(t) optimal boshqaruv uzluksiz emas, uzilishga ega bo'lgan funksiya ekan. Funksiyalarning ancha keng sinfi bu o'lchovli funksiyalar sinfi hisoblanadi. Biz o'lchovli tushunchasi faqatgina qandaydir $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida aniqlangan va Y metrik fazoda qiymat qabul qiluvchi funksiyalar uchungina kiritamiz. Buni turli usullar bilan amalga oshirish mumkin. Biz buni matematik analiz kursida qabul qilingandek bajaramiz. Funksiyaga uzluksizligi tushunchasi uchun bizga I kesmada bo'lishi mumkin bo'lgan barcha $\Sigma$-atrofi tizimini aniqlsh kerak edi. O'lchovli tushunchasi uchun bu yetarli emas, shuning uchun I kesmada $\Sigma$ ancha to'la to'plamlar tizimni kiritish kerak bo'ladi. Bu $\Sigma$ to'plamlar tizimi barcha bo'lishi mumkin bo'lgan I kesmaning o'lchovga ega qism to'plamlaridan tashkil topadi.

**O'lchovli to'plamlar.** Shunday qilib, $I=[t_0,t_1]$ kesmada $\Sigma$ to'plamlar sinfini qarab chiqamiz. Har bir $\Sigma$ tizimdagi to'plam o'lchovli to'plam, deyiladi va unga qandaydir $\mu$ Lebeg o'lchovi mos qo'yiladi. Shunday qilib, $\mu:\Sigma\to E^1$ funksiya aniqlanadi. Biz $\Sigma$ o'lchovga ega bo'lgan to'plamlar sistemasini va unga mos $\mu$ Lebeg o'lchovini bir nechta etaplarda ta'riflaymiz.

Eng avvalo, I kesmada $\Sigma$ tizimda bo'lishi mumkin bo'lgan barcha intervallarni beramiz

$$(a,b),\ [a,b],\ (a,b],\ [a,b). \qquad (1)$$

Bunday intervallar uchun Lebeg o'lchovini $\mu=b-a$ ni qo'yib aniqlaymiz. Shunday qilib, xususiy hol sifatida $I=[t_0,t_1]$ butun kesma o'lchovi aniqlandi, aynan $\mu(I)=t_1-t_0$, $t\in I$ bitta nuqta o'lchami aynan $\mu(\{t\})=0$, hamda bo'sh to'plam o'lchovi $\mu$ (Ø)=0. Keyinchalik, $\Sigma$ tizimga ixtiyoriy $A \subset I$ to'plamni kiritamiz, uni (1) ko'rinishidagi chekli yoki sanoqli juft-jufti bilan kesishmaydigan $P_i$ intervallar birlashmasi sifatida tasavvur qilish mumkin, ya'ni ixtiyoriy

$$A = \bigcup_i P_i, \quad P_i \cap P_j = \emptyset, \quad i \neq j, \tag{2}$$

ko'rinishdagi to'plam.

Bu A to'plamlar uchun Lebeg o'lchovini $\mu(A) = \sum_i \mu(P_i)$ almashtirish bajarib aniqlaymiz. Shunday qilib, $\Sigma$ tizimga I kesmadan olingan barcha mumkin bo'lgan ochiq to'plamalrni kiritamiz, chunki ixtiyoriy ochiq to'plamni butun kesmagalarning chekli yoki sanoqli sondagi bir biri bilan kesishmaydigan har hil ochiq intervallarning birlashmasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Demak, $\Sigma$ tizimga butun I kesmaning to'ldiruvchisi chekli yoki sanoqli sondagi juft-juft bilan turli xil qilib olingan (1) ko'rinishdagi $P_i$ intervallarning birlashmasi sifatida ifodalash mumkin bo'lgan $A \subset I$ to'plamni kiritamiz, ya'ni

$$A = I \setminus \bigcup_i P_i, P_i \cap P_j \neq \emptyset, \ i \neq j, \tag{3}$$

ko'rinishidagi ixtiyoriy to'plamni olamiz.

Bunday to'plamlar uchun Lebeg o'lchovini $\mu(A) = \mu(I) - \sum_i \mu(P_i)$ deb olib aniqlaymiz. Shu tariqa, $\Sigma$ tizimga I kesmadagi barcha bo'lishi mumkin bo'lgan yopiq to'plamlar kiradi, chunki ixtiyoriy bunday yopiq to'plamni chekli yoki sanoqli sondagi bir biri bilan kesishmaydigan har hil ochiq intervallarning birlashmasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Shunday qilib, $\Sigma$ tizim yetarlicha boy bo'ldi, u o'z ichiga barcha bo'lishi mumkin bo'lgan (1) - ko'rinishidagi intervallarni hamda (2) va (3) ko'rinishidagi barcha bo'lishi mumkin bo'lgan to'plamalrni oladi. Ammo, hali ham bu yetarli emas ekan, sistemaga biz yana qandaydir to'plamalrni kiritamiz. Buni quyidagicha amalga oshiramiz. Ixtiyoriy $A \subset I$ to'plam uchun bu to'plamning barcha bo'lishi mumkin bo'lgan (1) ko'rinishdagi juft-juft bilan kesishuvchi $P_i$ intervallarning chekli yoki sanoqli qoplamani ko'rib chiqamiz. Shu tariqa, $A \subset \bigcup_i P_i$ ga egamiz. A to'plamning $\mu^*(A)$ yuqori o'lchovi, deb

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_i P_i} \sum_i \mu(P_i)$$

songa aytamiz.

Bu yerda quyi chegara A to'plamning ko'rib chiqilgan barcha bo'lishi mumkin bo'lgan qoplamasi bo'yicha olinadi. Keyin, A to'plamning $\mu_*(A)$ quyi o'lchovi deb

$$\mu_*(A) = \mu(I) - \mu^*(I \setminus A)$$

songa aytamiz.

Agar A to'plamning yuqori va quyi o'lchovlari ustma-ust tushsa va u $\mu$ soniga teng, ya'ni $\mu^*(A)=\mu_*(A)=\mu$ bo'lsa, u holda bunday to'plamni $\Sigma$ tizimga kiritamiz, ya'ni uni o'lchovga ega, deb $\mu$ sonni esa Lebeg o'lchovi, deb ataymiz.

Albatta, bunday o'tishning to'g'riligini isbotlash kerak, ya'ni agar $A\subset I$ to'plam ko'rinishi (1), (2) yoki (3) lardan birortasi bo'lsa, u holda uning yuqori va quyi o'lchamlar yordamida qurilgan o'lchami avvalroq kiritilgan Lebag o'lchami bilan ustma-ust tushishini isbotlash kerak. Buni isbotlash o'quvchiga havola etiladi.

Shunday qilib, biz $I=[t_0,t_1]$ kesmada o'lchovga ega to'plamalarning $\Sigma$ tizimini qurdik va har bir o'lchovga ega bo'lgan A to'plamlar uchun uning $\mu(A)$ Lebeg o'lchovini aniqladik. O'lchovga ega to'plamalrning xossalarini birma-bir ko'rib chiqmaysiz, ular batafsil matematik analiz kursida o'rganiladi.

Ta'kidlab lozimki, I kesmada o'lchovga ega bo'lmagan to'plamlar ham mavjud, ya'ni I kesmaning hamma to'plam ostilari ham $\Sigma$ tizimga kirmaydi.

Agar qandaydir S(t) xossa nol o'lchovli $A\subset I$ to'plamning nuqtalaridan tashqari barcha $t\in I$ nuqtalar uchun bajarilsa, u holda S(t) xossa deyarli I vaqt kesmasining hamma joyida bajariladi deymiz.

**O'lchovli funksiyalar.** $I=[t_0,t_1]$ vaqt kesmasi, $\rho(a,b)$ metrikali Y metric fazo va $f:I\to Y$ funksiya berilgan bo'lsin. f o'lchovli funksiya, deyiladi, agar f akslantirishda ixtiyoriy $S_E(y_0=\{y\in Y\}:\rho(y,y_0)\le E\}$ sharning timsoli o'lchovli to'plam bo'lsa, ya'ni $\Sigma$ to'plamlar tizimiga tegishli bo'lsa, ya'ni agar ixtiyoriy $\varepsilon\ge 0$ va ixitiyoriy $y_0\in Y$ nuqta uchun quyidagi munosabat bajarilsa: $f^{-1}(S_E(y_0))\in\Sigma$.

$f:I\to Y$ funksiyaning bunday o'lchovlilik ta'rifi ixtiyoriy $Y$ metrik fazo uchun o'rinli. Y=E` bo'lgan hol uchun, analizda odatda, bu ta'rifga ekvivalent bo'lgan boshqa ta'rifni berishadi.

**Misol 3.** $$f(t)=\begin{cases}+1, & agar \quad 0\le t\le \dfrac{t^*}{2},\\ -1, & agar \quad \dfrac{t^*}{2}<t\le t^*,\end{cases}$$

shart bilan aniqlanuvchi 1- misoldan olingan $f:[0,t^*]\to E'$ funksiyani ko'rib chiqamiz.

Bu o'lchovli funksiya ekanligini ko'rsatamiz. Bu vaziyatda ixtiyoriy E` fazodagi shar uchun faqatgina 4 ta hol bo'lishi mumkin: bu shar +1,-1 nuqtalarni o'z ichiga olmaydi; faqat +1 nuqtani o'z ichiga oladi hamda ikkala +1,-1 nuqtalarni o'z ichiga oladi. Birinchi holda, bu sharning timsoli bo'sh to'plam bo'ladi, 2-holda [0,t*/2] kesma bilan ustma-ust tushadi, 3-holda (t*/2,t*] kesma bilan ustma-ust tushadi hamda 4-holda [0,t*] kesma bilan ustma-ust tushadi.Ammo bu to'plamlar hammasi ham I=[0,t*] kesma uchun qurilgan $\Sigma$

to'plamalar tizimiga kiravermaydi. Bu $f:[0,t^*]\to E'$ funksiya o'lchamga egaligi kelib chiqadi.

**Misol 4.** $Y=E^n$ bo'lganda o'lchovlilikning umumiy tushunchasi qanday talqin qilinishini ko'rib chiqamiz.

$f:I\to E^n$ o'lchovli funksiya, deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon\geq 0$ va ixtiyoriy $y_0\in E^n$ nuqta uchun $\{t\in I:\|f(t)-y_0\|\leq E\}$ to'plam o'lchovli bo'lsa, ya'ni $\Sigma$ to'plamlar tizimiga tegishli.

**Misol 5.** Ko'p qiymatli $F:I\to\Omega(E^n)$ akslantirish uchun o'lchovlilikning umumiy tushunchasi qanday talqin qilinishini ko'rib chiqamiz. Ko'p qiymatli $F:I\to\Omega(E^n)$ akslantirish o'lchovga ega deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon\geq 0$ va ixtiyoriy $K\in\Omega(E^n)$ element uchun , ya'ni $E^n$ fazoning $K$ bo'sh bo'lmagan kompakt uchun $\{t\in I:h(F(t),k)\leq\varepsilon\}$ to'plam o'lchovli bo'lsa, ya'ni $\Sigma$ to'plamlar tizimiga tegishli bo'lsa.

**O'lchovli funksiyalarning xossalari.**

Biz keyinchalik foydalaniladigan o'lchovli funksiyalarning bir qancha xossalarini isbotsiz ko'rib chiqamiz. Bu xossalarning isbotini matematik analiz kursidan topishingiz mumkin.

$I=[t_0,t_1]$ avvalgidek berilgan vaqt kesmasi , Y esa metrik fazo bo'lsin.

**1-xossa.** Har qanday $f:I\to Y$ uzluksiz funksiya o'lchovli funksiya bo'ladi.

Shunday qilib, uzluksiz funksiyalar sinfi o'lchovli funksiyalar sinfiga kiritiladi, ya'ni biz haqiqattan ham, barcha uzluksiz funksiyalar sinfini o'lchovli funksiyalar sinfigacha kengaytirdik.

**2-xossa.** $f_n:I\to Y$ har bir $t\in I$ uchun $\{f_n(t)\}$ ketma-ketlik f(t) qiymatga yaqinlashuvchi o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi bo'lsin. U holda f(t) o'lchovli funksiya bo'ladi.

Shunday qilib, o'lchovli funksiyalar fazosi nuqtali yaqinlashishga nisbatan yopiq hisoblanadi.

**3-xossa.** Qo'shimcha Z metrik fazo bo'lsin. Agar $f:I\to Y$ funksiya o'lchovli, $g:Y\to Z$ funksiya esa uzluksiz bo'lsa, u holda $g(f(t)):I\to Z$ funksiya o'lchovli bo'ladi.

**4-xossa** $f_1,f_2:I\to Y$ lar 2 ta o'lchovli funksiyalar, $\lambda$ esa qandaydir son bo'lsin. U holda $f_1(t)\pm f_2(t)$, $\lambda f_1(t)$ funksiyalar ham o'lchovli bo'ladi. Bundan tashqari, agar Y=E' bo'lsa, u holda $f_1(t)\cdot f_2(t)$ va $\dfrac{f_1(t)}{f_2(t)}$ funksiyalar ham o'lchovli bo'ladi. Albatta, $\dfrac{f_1(t)}{f_2(t)}$ xususiy holda $f_2(t)\neq\dot{O}$ , deb hisoblanadi.

Endi, $Y=E^n$ bo'lgandagi hol uchun o'lchovli funksiyalarning bir qator xossalarini ko'rib chiqamiz.

$f: I \to E^n$ oddiy funksiya deyiladi, agar u $y_1, y_2, ..., y_k, ..., \in E^n$ qiymatlarning sanoqli sonlaridan ko'p bo'lmagan qiymatlarini qabul qilsa.

**5-xossa.** $f: I \to E^n$ oddiy va $y_1, y_2, ..., y_k, ..., \in E^n$ uning qiymatlari to'plami bo'lsin. U holda f(t) o'lchovli funksiya bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki barcha $A_k = \{t : f(t) = y_k\}$ to'plamlar o'lchovli bo'lsa.

**6-xossa.** $f: I \to E^n$ o'lchovli funksiya bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki u oddiy o'lchovli funksiyalar ketma-ketligining tekis limiti bo'lsa, ya'ni barcha $t \in I$ lar uchun $f(t) = \lim_{k \to \infty} f_k(t)$ tekis bo'ladigan oddiy o'lchovli funksiyalarning $f_k(t)$ ketm-ketligi mavjud bo'lsa.

**Lebeg integrali.** Integral tushunchasini o'lchovli funksiyalar uchun ham keltirish mumkin. Birinchi oddiy o'lchovli funksiyalar uchun kiritamiz. $f: I \to E^n$ o'lchovli, oddiy funksiya va $y_1, y_2, ..., y_k, ..., \in E^n$ qiymatlar to'plami bo'lsin. U holda o'lchovli funksiyalarning 5 xossasiga asosan, barcha $\{t : f(t) = y_k\}$ to'plam o'lchovli bo'ladi. Agar $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{t : f(t) = y_k\}) y_k$ absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning yig'indisini $f(t)$ funksiyaning Lebeg integrali deb ataymiz va $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ deb belgilaymiz. Shunday qilib, $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{t : f(t) = y_k\}) y_k$.

Endi, $f: I \to E^n$ ixtiyoriy o'lchovli funksiya berilgan bo'lsin. U holda o'lchovli funksiyalarning 6 xossasiga asosan, shunday $f_k(t)$ oddiy o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi mavjudki, barcha $t \in I$ lar uchun $\lim_{k \to \infty} f_k(t) = f(t)$ munosabat bajariladi. Agar $\lim_{k \to \infty} \int_{t_0}^{t_1} f_k(t)dt = f(t)$ limit mavjud bo'lsa, u holda u $f(t)$ funksiyaning Lebeg integrali, deb ataladi va $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ kabi belgilanadi. Shunday qilib, $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = \lim_{k \to \infty} \int_{t_0}^{t_1} f_k(t)dt$. Albatda, Lebeg integralining bunday ta'rifi to'g'riligini isbotlash zarur, ya'ni $f(t)$ funksiyaning Lebeg integrali $f_k(t)$ oddiy o'lchovli funksiyalarning ketma-ketligiga bog'liq emas. Isboti o'quvchiga havola etiladi.

**Lebeg integralining xossalari.**

**1-xossa.** Agar $f: I \to E^n$ funksiya Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda u Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi bo'ladi va bu integrallar ustma-ust tushadi.

Shunday qilib, Lebeg integrali o'lchovli funksiyalardan olingan Riman integralining kengaytmasidan iborat ekan.

**2-xossa.** $f: I \to E^n$ funksiya faqat va faqat shu holda, Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'ladiki, agar barcha $t \in I$ lar uchun $f(t)$ funksiya o'lchovli va $\|f(t)\| \le k(t)$ bo'lsa, bu erda $k: I \to E^1$ Lebeg ma'nosida integrallanuvchi skalyar funksiya. Bundan $f: I \to E^n$ faqat va faqat shu holda, Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'ladiki, agar u, deyarli $I$ vaqt oraligida uzluksiz bo'lsa.

Riman integralining barcha xossalari Lebeg integrali uchun ham o'rinli. Ulardan ayrimlarini keltiramiz.

**3-xossa.** Aytaylik, $f_1, f_2: I \to E^n$ funksiyalar **integrallanuvchi** va $\lambda$ ixtiyoriy son bo'lsin. U holda

$$\int_{t_0}^{t_1}[\lambda f_1(t)]dt = \lambda\int_{t_0}^{t_1} f_1(t)dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}[f_1(t) \pm f_2(t)]dt = \int_{t_0}^{t_1} f_1(t)dt \pm \int_{t_0}^{t_1} f_2(t)dt.$$

**4-xossa.** Aytaylik, $f: I \to E^n$ funksiya integrallanuvchi **bo'lsin, u holda**

$$\left\|\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt\right\| \le \int_{t_0}^{t_1}\|f(t)\|dt.$$

**5-xossa.** Aytaylik, $f: I \to E^n$ funksiya integrallanuvchi va $\tau \in I$ bo'lsin. U holda $g(t) = \int_{t_0}^{\tau} f(t)dt$ integral yuqori integrallash yo'li $\tau \in I$ ga uzluksiz bog'liq bo'ladi, ya'ni $g: I \to E^n$ funksiya uzluksiz bo'ladi.

Endi, Lebeg integralining $n = 1$ holdagi ayrim xossalarini keltiramiz.

**6-xossa.** Aytaylik $f: I \to E^n$ funksiya integrallanuvchi va manfiy bo'lmasin, ya'ni $f \ge 0$. U holda $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ integralning ham qiymati manfiy bo'lmaydi, ya'ni $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt \ge 0$.

**7-xossa.** Aytaylik, $f: I \to E^n$ funksiya integrallanuvchi, manfiymas, ya'ni $f \ge 0$, va $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = 0$ **bo'lsin.** U holda $f(t)$ funksiya deyarli barcha joyda nolga teng bo'ladi.

## 18 §. O'lchovli ko'p qiymatli akslantirishlar

Ko'p qiymatli akslantirish, deb ixtiyoriy $F: I \to \Omega(E^n)$ funksiyaga, ya'ni, qiymatlari $E^n$ fazosida bo'sh bo'lmagan kompakt to'plamlarga teng bo'lgan F(t) funksiyaga aytgan edik. So'ngra ko'p qiymatli akslantirish o'lchovli deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon \geq 0$ uchun hamda bo'sh bo'lmagan $K \in \Omega(E^n)$ kompaktga nisbatan $\{t : h(F(t), K) \leq \varepsilon\}$ to'plam Lebeg bo'yicha o'lchovga ega bo'lsa.

**5-lemma.** F(t) ko'p qiymatli akslantirish o'lchovli bo'lsin. U holda $C(F(t),\psi)$ tayanch funksiya har bir mahkamlangan $\psi \in E^n$ ning qiymatida t bo'yicha o'lchovli bo'ladi, ya'ni $C(F(\cdot),\psi): I \to E^n$ funksiya o'lchovli.

**Isbot.** Farazga ko'ra, $F(\cdot): I \to \Omega(E^n)$ ko'p qiymatli akslantirish o'lchovli, $C(\cdot,\psi): \Omega(E^n) \to E^n$ funksiya esa 2-lemmaning natijasiga ko'ra uzluksiz. Shunday qilib, $C(F(\cdot),\psi): I \to E^1$ funksiya o'lchovli funksiyalarning 3-xossasiga ko'ra, o'lchovli. Lemma isbotlandi.

$f: I \to E^n$ funksiya, ixtiyoriy $t \in I$ uchun $F(\cdot): I \to \Omega(E^n)$ ko'p qiymatli akslantirishning bir qiymatli tarmog'i deyiladi, agar $f(t) \in F(t)$ tegishlilik munosabati

bajarilsa.

**6-lemma.** F(t) akslantirish o'lchovli bo'lsin. U holda F(t) akslantirishning kamida bitta o'lchovli f(t) tarmog'i mavjud bo'ladi.

## 19 §. Ko'p qiymatli akslantirishlarning integrallari

Aytaylik, $I = [t_0, t_1]$ va biron $F(\cdot): I \to \Omega(E^n)$ ko'p qiymatli akslantirish berilgan bo'lsin. F(t) ko'p qiymatli aklantirishdan I vaqt oralig'ida olingan integral, deb

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt = \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt : f(t) \in F(t) \right\}$$

to'plamga aytiladi. Tenglikning o'ng tomonida F(t) akslantirishning barcha bir qiymatli tarmoqlari bo'yicha Lebeg integrali olinadi. Ravshanki, $G$ $E^n$ fazoning qism to'plamidir.

**1-Teorema.** F(t) ko'p qiymatli akslantirish o'lchovli va $|F(t)| \leq k(t)$ baholashni qanoatlantirsin, bu yerda k(t)- vaqt oralig'ida Lebeg bo'yicha integrallanuvchi skalyar funksiya. U holda mazkur ko'p qiymatli akslantirishdan olingan $G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt$ integral $E^n$ fazoda kompakt to'plam bo'ladi, ya'ni

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt \in \Omega(E^n).$$

Bundan tashqari $G$ qavariq to'plam bo'ladi.

**Isbot.** Teoremaning shartiga ko'ra, $G$ bo'sh to'plam bo'lmasligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, 6 lemmaga ko'ra, F(t) ko'p qiymatli akslantirishning kamida bitta o'lchovli f(t) tarmog'i mavjud bo'ladi. So'ngra biz

$$\|f(t)\| \le |F(t)| \le k(t) \qquad (1)$$

ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, Lebeg integralining 2 xossasiga ko'ra, bu f(t) tarmoq integrallanuvchi va $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt \in G$ munosabat o'rinli bo'ladi, ya'ni $G$ to'plam bo'sh emas.

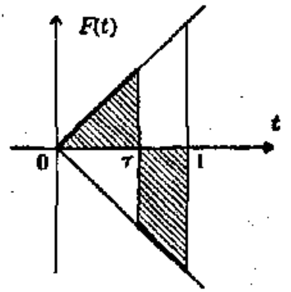
Endi, $G$ to'plamning chegaralanganligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, $g \in G$ bo'lsin. U holda, $g = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ munosabat o'rinli bo'ladi, bu yerda f(t)- ko'p qiymatli akslantirish F(t) dan olingan biron tarmoq. Lebeg integralining 4-xossasi hamda (1) munosabatdan

$$\|g\| = \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt \right\| \le \int_{t_0}^{t_1} \|f(t)\| dt \le \int_{t_0}^{t_1} k(t)dt = k$$

ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, $G \subset S_k(0)$, ya'ni $G$ to'plam chegaralangan.

Teoremaning isbotini yakunlash uchun $G$ ning yopiq hamda qavariqligini isbotlash qoldi. Lekin bu yerda mazkur omillarning isboti keltirilmaydi.

**Misol 1.** F(t)=t {-1; +1} munosabat bilan aniqlangan $F : [0,1] \to \Omega(E^1)$ ko'p qiymatli akslantirishni ko'raylik (25-rasm). $G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt$ integralni topamiz. $g \in G$ maksimal qiymat $\frac{1}{2}$ ga teng bo'lib, unga f(t)=t bir qiymatli tarmoqda erishiladi, chunki, $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Kuddi shunday $-\frac{1}{2}$ ga teng minimal $g \in G$ qiymatga f(t)=-t bir qiymatli tarmoqda erishiladi, chunki, $\int_0^1 f(-t)dt = -\frac{1}{2}$. Shunday qilib, biz $G \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ munosabatga kelamiz.




25-rasm

1-teoremaga ko'ra, $G$ to'plam qavariqdir, demak, $G=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Lekin ko'p qiymatli akslantirishdan olingan integral F(t) to'plamlarning $t\in I$ da qavariq bo'lishi, yoki bo'lmasligiga qaramay, baribir qavariq bo'lib qolishining sababini o'rganish uchun, 1-teoremadan foydalanmasdan turib, $G=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ ekanligini isbotlaymiz. Biz yuqorida $G\subset\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ ekanligini isbotlagan edik. $g\in G$ ekanligini isbotlash uchun F(t) ko'p qiymatli akslantirishda Lebeg integrali $g$ qiymatga teng bo'lgan bir qiymatli akslantirishning mavjudligini ko'rsatish kerak. Bunday tarmoq

$$f(t)=\begin{cases} t, \ agar \ 0\le t\le\sqrt{g+\frac{1}{2}}=\tau \\ -t, \ agar \ \sqrt{g+\frac{1}{2}}<t\le 1 \end{cases}$$

shart orqali beriladi. Ravshanki, f(t) funksiya Lebeg bo'yicha integrallanuvchi bo'lib, $\int_0^1 f(t)dt=g$ munosabat o'rinli. Bu degani, $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\subset G$ va shunday qilib, $G=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. 1-teoremaga ko'ra, $G\in\Omega(E^n)$ bo'lsa, u holda ko'p qiymatli akslantirishning integrali uchun $C(G,\psi)$ tayanch funksiyasini aniqlash mumkin.

**2-Teorema.** F(t) ko'p qiymatli aklantirish o'lchovli va $|F(t)|\le k(t)$ baholashni qanoatlantirsin, bu yerda, $k(t)$ $I=[t_0,t_1]$ oraliqda Lebeg bo'yicha integrallanuvchi funksiya. U holda

$$C\left(\int_{t_0}^{t_1}F(t)dt,\psi\right)=\int_{t_0}^{t_1}C(F(t),\psi)dt \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda mazkur teoremaning isboti keltirilmaydi. (2) tenglik-ning o'ng qismidagi integral mavjud ekanligini qayd qilamiz, xolos. Haqiqatdan ham, 5 lemmaga ko'ra, $C(F(t),\psi)$ tayanch funksiya t bo'yicha o'lchovli bo'ladi, $|F(t)| \le k(t)$ bahoni hisobiga $F(t) \subset S_{k(t)}(0)$ tegishlilik, ya'ni $|c(F(t),\psi)| \le k(t)\|\psi\|$ tengsizlik bajariladi. (2) tenglikning o'ng tomonidagi integralning mavjudligi Lebeg integralining 2 xossasidan kelib chiqadi. 2-teorema yordamida F(t) ko'p qiymatli akslantirishlardan olingan integrallarni topish mumkin. Haqiqatdan ham, buning uchun (2) formulaga nisbatan $C(F(t),\psi)$ tayanch funksiyasini qurib, endilikda bir qiymatli $C(F(t),\psi)$ funksiyani har bir $\psi \in E^n$ qiymatda t bo'yicha integrallab, so'ngra, hosil bo'lgan $c(G,\psi)$ tayanch funksiyasidan bo'sh bo'lmagan qavariq $G$ to'plamni tiklash mumkin. $G$ qavariq to'plamni uning $c(G,\psi)$ tayanch funksiyasidan tiklash uchun, $c(C,\psi)$ tayanch funksiyasi $c(G,\psi)$ bilan ustma-ust tushadigan F to'plamni tanlab olish kerak. U holda tayanch funksiyaga taalluqli 7-xossaning natijasiga ko'ra, $G = convF$ bo'ladi. Buni misolda ko'rsatamiz.

**Misol 2.**

$$F(t) = A(t)\,\{-v, v\} \tag{3}$$

ko'rinishdagi $F:[-\pi,\pi] \to \Omega(E^2)$ ko'p qiymatli akslantirishdan olingan $G = \int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt$ integralni topamiz, bu yerda A(t) (2x2) o'lchovli matrisa, $v$ esa $E^2$ tekislikdagi vektor. Shunday qilib, F(t) to'plam A(t) akslantirishdagi -v va v nuqtalardan tashkil topgan o'zgarmas {-v, v} to'plamning qiyofasi (obrazi) bo'ladi.

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & tgt \\ \cos t & ctgt \end{pmatrix} \quad v = (1,0)$$

bo'lsin. $G$ integralni qurish uchun, avvalambor, uning $c(C,\psi)$ tayanch funksiyasini
topamiz. 2-teorema, (3) formula, tayanch funksiyasining 4-xossasiga ko'ra,

$$c(C,\psi) = c\left(\int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt, \psi\right) = \int_{-\pi}^{\pi} c(F(t),\psi)dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} c(A(t)\{-v, v\}, \psi)dt = \int_{-\pi}^{\pi} c(\{-v, v\}, A^*(t)\psi)$$

ga ega bo'lamiz. {-v, v} to'plamning tayanch funksiyasi

$$c(\{-v, v\}, \psi) = |(v, \psi)|$$

ko'rinishda bo'ladi. Shunday qilib, biz

$$c(C,\psi) = \int_{-\pi}^{\pi} |v, A^*(t)\psi| dt = \int_{-\pi}^{\pi} |A(t)v, \psi| dt$$

ga ega bo'lamiz. Endi, shu ifodaga A(t) matrisa hamda v vektorning qiymatlarini qo'yib,

$$c(C,\psi)=\int_{-\pi}^{\pi}|\psi_1\sin t+\psi_2\cos t|dt$$

ni topamiz. $\psi\in E^2$ vektorning koordinatalarini

$$\psi_1=\|\psi\|\cos\alpha \qquad \psi_2=\|\psi\|\sin\alpha$$

ko'rinishda yozib olamiz. U holda biz

$$c(C,\psi)=\int_{-\pi}^{\pi}\|\psi\||\sin(t+\alpha)|dt=4\|\psi\|$$

*munosabatga kelib qolamiz. Shu yo'l bilan, G integralning tayanch* funksiyasini, *aniqrog'i* $c(G,\psi)=4\|\psi\|$ *ni topdik.* Lekin, tayanch funksiyalar mavzusidagi 4-misolda ko'rsatilganidek, $S_4(0)$ sharning tayanch funksiyasi $c(S_4(0),\psi)=4\|\psi\|$ ko'rinishdadir. Shunday qilib, ikkita $G$ va $S_4(0)$ to'plamlarning tayanch funksiyalari ustma-ust tushadi. Bu to'plamlar qavariq bo'lgani uchun, tayanch funksiyalarga taalluqli 7-xossaning natijasiga ko'ra, ular ustma-ust tushadi. Demak, $G=S_4(0)$.

2-misolda $G$ ni integralning bevosita ta'rifidan kelib chiqqan holda qurib bo'lmaydi. Buning uchun ko'p qiymatli F(t) akslantirishning cheksiz sondagi bir qiymatli tarmoqlari f(t) ni integrallashga to'g'ri keladi. Ayni paytda biz buni 2-teorema yordamida hech qanday qiyinchiliklarsiz amalga oshirdik.

Endi, o'zgaruvchan yuqori chegarali ko'p qiymatli funksiyadan olingan integralni, ya'ni

$$G(\tau)=\int_{t_0}^{\tau}F(t)dt$$

funksiyani ko'ramiz, bu yerda $\tau\in[t_0,t_1]$. 1-teoremaga ko'ra, bu funksiya I=[$t_0$, $t_1$] kesmani $\Omega(E^n)$ metrik fazoga akslantiradi.

**3-Teorema.** $F:I\to\Omega(E^n)$ ko'p qiymatli akslantirish o'lchovli va $|F(t)|\le k(t)$ bahoni qanoatlantirsin, bu yerda k(t) Lebeg bo'yicha I vaqt oralig'ida integrallanuvchi funksiya. U holda $G(\tau)=\int_{t_0}^{\tau}F(t)dt$ funksiya I oraliqda uzluksiz bo'ladi.

**Isbot.** Bu teoremani isbotlash uchun tayanch funksiyalarning xossalaridan foydalanamiz. Avvalambor, $C(G(\tau),\psi)$ tayanch funksiyaning $\psi\in S$ ga nisbatan $\tau$ bo'yicha tekis uzluksiz ekanligini isbotlaymiz.

Bilamizki, F(t) ko'p qiymatli akslantirish $|F(t)|\le k(t)$ bahoni qanoatlantiradi, u holda $F(t)\subset S_{k(t)}(0)$ va tayanch funksiyasining 8-xossasiga ko'ra,

$$C(F(t),\psi)\le k(t)\|\psi\| \tag{4}$$

bo'ladi. So'ngra, tayanch funksiyasining 11-xossasiga ko'ra,

$$C(F(t),\psi)+C(F(t),-\psi)\ge 0$$

bo'ladi. Bu erdan (4) tengsizlikni hisobga olib,

$$-C(F(t),\psi)\le C(F(t),-\psi)\le k(t)\|-\psi\|=k(t)\|\psi\|.$$

Shunday qilib biz,

$$C(F(t),\psi)\le k(t)\|\psi\| \tag{5}$$

bahoga ega bo'ldik. 2-teoremadan foydalangan holda, biz ixtiyoriy $\tau,\tau'\in R$ larga nisbatan

$$C(C(\tau),\psi)-C(C(\tau'),\psi)\le \int_{t_0}^{\tau}C(F(t),\psi)dt-\int_{t_0}^{\tau'}C(F(t),\psi)dt=\int_{\tau'}^{\tau}C(F(t),\psi)dt$$

ekanligini keltirib chiqaramiz. (5) baholashdan foydalangan holda

$$|C(C(\tau),\psi)-C(C(\tau'),\psi)|\le\left|\int_{t_0}^{\tau}C(F(t),\psi)dt\right|\le\left|\int_{\tau'}^{\tau}k(t)dt\right|\|\psi\|$$

ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, barcha $\psi\in S$ larga nisbatan

$$|C(C(\tau),\psi)-C(C(\tau'),\psi)|\le\left|\int_{\tau'}^{\tau}k(t)dt\right|$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikning o'ng qismi $\psi$ vektorga bog'liq bo'lmaydi hamda nolga intiladi, chunki $g(\tau)=\int_{\tau'}^{\tau}k(t)dt$ funksiya Lebeg integralining 5-xossasiga ko'ra, uzluksiz bo'ladi. Demak, $C(G(\tau),\psi)$ funksiya $\psi\in S$ uchun $\tau$ bo'yicha tekis uzluksiz bo'ladi.

Isbotni yakunlash uchun bizga 4-lemmaning natijasidan foydalanish qoldi, xolos. Chunki $G(\tau)$ to'plam barcha $\tau\in I$ lar uchun qavariq, 1-teoremaga ko'ra uning tayanch funksiyasi $C(G(\tau),\psi)$ $\psi\in S$ uchun $\tau$ bo'yicha tekis uzluksiz bo'ladi, unda 4-lemmaning natijasiga ko'ra, ko'p qiymatli $C(\tau)$ akslantirish uzluksiz bo'ladi.

**Masalalar.**

1. F(t)=A(t) {-v; v} ko'rinishda bo'lgan $F:[-2\pi,2\pi]\to\Omega(E^2)$ ko'p qiymatli akslantishning $G=\int_{2\pi}^{4\pi}F(t)dt$ integralini toping, bu yerda

$$A=\begin{pmatrix}3\sin t & -\cos 3t\\ 7\cos 3t & 3\sin 3t\end{pmatrix},\qquad v=(0,2).$$

2. $\int_{t_0}^{t_1}F(t)dt$ integralni toping, bu yerda F(t) $E^n$ fazodagi markazi a(t) nuqtada bo'lgan r(t) radiusli shar, ya'ni $F(t)=S_{r(t)}(a(t))$.

## 20 §. Chiziqli tezkorlik masalasi

Endi xatti-harakati

$$\dot{x}=Ax+u \qquad (1)$$

chiziqli differensial tenglamalar tizimi ko'rinishida yoziluvchi ob'yektning kuzataylik, bu yerda $x$ tizim fazali holatining n o'lchovli vektori, u-n o'lchovli boshqaruv vektori, A- $(n\times n)$ o'lchovli kvadratik matrisa. Aytaylik, $|U(t)|\le k(t)$ ni qanoatlantiruvchi $U: E^{1}\to\Omega(E^{n})$ ko'p qiymatli akslantirish berilgan bo'lsin, bu yerda $k(t)$ ixtiyoriy chekli $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida Lebeg bo'yicha integrallanuvchi skalyar funksiya. u(t) funksiya qandaydir $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida joiz boshqaruv, deyiladi, agar u o'lchovli va $U(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning bir qiymatli shohi bo'lsa, ya'ni u o'lchovli va barcha $t\in I$ lar uchun $u(t)\in U(t)$ munosabatni qanoatlantirsa. Quyida ixtiyoriy u(t) joiz boshqaruv hamda har *qanday* $x(t_0)$ *boshlang'ich holat uchun*

$$\dot{x}=Ax+u(t) \qquad (2)$$

differensial tenglamaning yagona x(t) yechimi mavjud ekanligi ko'rsatiladi. Aynan shu x(t) yechim dinamik obyektga u(t) joiz boshqaruvni ta'sir qilgan paytdagi fazali holatning o'zgarishini ifodalaydi.

$E^{n}$ fazoda ikkita bo'sh bo'lmagan kompakt $M_0$ va $M_1$ to'plamlar berilgan bo'lsin, ya'ni $M_0, M_1\in\Omega(E^{n})$. u(t) joiz boshqaruv berilgan $I=[t_0,t_1]$ vaqt oraliqda boshlang'ich $M_0$ to'plamdan oxirgi $M_1$ to'plamga o'tishni amalga oshiradi deyiladi, agarda (2)- tenglamaning x(t) yechimi

$$x(t_0)\in M_0, \qquad x(t_1)\in M_1$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirsa. Keyinchalik biz boshlang'ich $t_0$ momentni maxkamlangan, oxirgi vaqt $t_1$ momentni esa x(t) yechimning $M_1$ to'plamga tushish shartidan topiladi, deb faraz qilamiz. Tezkorlik masalasining mazmuni $M_0$ to'plamdan $M_1$ to'plamga eng qisqa vaqt ichida o'tishni ta'minlovchi u(t) joiz boshqaruvni topishdan iboratdir.

Bu masala uchun optimal boshqaruvning asosiy masalalarini o'rganish kerak bo'ladi. Ularga boshqaruvchanlik, optimal boshqaruvning mavjudligi masalalari, optimallikning zaruriy shartlari, optimallik hamda optimal boshqaruvning yetarlilik shartlari kiradi. Albatta, ushbu masalalarni yechish jarayonida dinamik obyektga qandaydir qo'shimcha shartlar qo'yib boriladi, lekin tezkorlik masalasining qo'yilishida keltirilgan farazlar har doim bajariladi, deb qabul qilinadi. Bu tushunchalar chiziqli tezkorlik masalasining mazmunini tashkil etadi.

## 21 §. Chiziqli differensial tenglamalar

u(t)- obyektning $I=[t_0,t_1]$ oraliqda berilgan joiz boshqaruvi bo'lsin. (2) differensial tenglamani qaraylik. Ushbu tenglamaning o'ng tomoni barcha $t\in I$ ning qiymatlari va barcha $x\in E^n$ lar uchun aniqlangan.

Bunday ko'rinishdagi tenglamalarning x(t) yechimlarini topishni o'rganish uchun, $(n\times n)$ o'lchovli A matrisalar bilan erkin ish olib borishni bilishimiz kerak. Algebra kursidan ma'lumki, bunday matrisalarni qo'shish, ayirish, songa ko'paytirish, o'zaro ko'paytirish mumkin. Biz ushbu amallarning barchasidan foydalanamiz. Bundan tashqari, agar A(t) o'zgaruvchi matrisa, ya'ni har bir elementi t o'zgaruvchining funksiyasidan iborat bo'lgan matrisa berilgan bo'lsa, u holda bu matrisani differensiallash, yoki integrallash mumkin. Jumladan, bu amallar har bir element bo'yicha olib boriladi.

A matrisa ustida olib borilishi mumkin bo'lgan yana bitta amalni ko'raylik. $(n\times n)$ o'lchovli A matrisaga $\alpha$ haqiqiy parametrga bog'liq bo'lgan biron o'zgaruvchan matrisani mos qo'yamiz. Bu matrisa A matrisaning eksponentsiali, deb atalib, $e^{\alpha A}$ ko'rinishda belgilanadi va

$$e^{\alpha A}=E+\alpha A+\frac{\alpha^2}{2!}A^2+\frac{\alpha^3}{3!}A^3+... \tag{3}$$

darajali matrisali qator ko'rinishida aniqlanadi. Bu yerda E orqali $(n\times n)$ o'lchovli birlik matrisa, belgilanadi. Algebrada (3) matrisali qator $\alpha$ sonli parametrning ixtiyoriy mahkamlangan qiymatiga yaqinlashishi isbotlangan, jumladan $e^{\alpha A}$ matrisaning elementlari $\alpha$ parametrning silliq funksiyalari bo'lib, $e^{\alpha A}$ matrisaning o'zi esa xosmas bo'ladi, ya'ni $\alpha$ ning ixtiyoriy qiymatida uning determimanti noldan farqli bo'ladi.

**Misol 1.** n=2 bo'lsin. A=$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ matrisaning $e^{\alpha A}$ eksponentsini topamiz.

Buning uchun (3) qatorning yig'indisini hisoblaymiz. Bu borada bevosita

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \qquad A^3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\; A^4=E\; A^5=A,...$$

munosabatlarning o'rinli ekanligi tekshiriladi. Bu matrisalarni (3)- qatorga qo'yib,

$$e^{\alpha A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\frac{\alpha^2}{2!}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\frac{\alpha^3}{3!}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\frac{\alpha^4}{4!}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+...=$$

$$=\begin{pmatrix}1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}+... & \alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}+...\\ -\alpha+\frac{\alpha^3}{3!}-\frac{\alpha^5}{5!}+... & 1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}+...\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

ga ega bo'lamiz.

Endi, (2)- differensial tenglamani o'rganishga qaytaylik. Agar mazkur tenglamadagi u(t) funksiya $I=[t_0,t_1]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda oddiy differensial tenglamalar kursidan ma'lumki, ixtiyoriy $x(t_0)$ boshlang'ich shartga nisbatan (2)- tenglamaning yechimi mavjud va yagona bo'ladi, bu yechim ixtiyoriy $t \in [t_0, t_1]$ uchun Koshi formulasi bilan beriladi

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} u(s) ds. \qquad (4)$$

Jumladan, bu formulada integral Riman ma'nosida tushuniladi, x(t) yechimning o'zi esa uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'ladi.

Lekin, o'lchovlilik mavzusidagi 2-misolda ko'rsatilishicha, hattoki, eng sodda chiziqli tezkorlik masalasida ham u(t) optimal boshqaruv uzluksiz funksiya bo'lmaydi. Keltirilgan misolda u(t) optimal boshqaruv bo'lakli-uzluksiz funksiya bo'ladi. Shuning uchun bizning tezkorlik masalamizda u(t) optimal boshqaruv o'lchovli funksiya bo'ladi. Bundan tashqari, ixtiyoriy u(t) joiz boshqaruv

$$\|u(t)\| \le |U(t)| \le k(t)$$

bahoni qanoatlantiradi, bu yerda k(t) Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiya. Shu bilan birga, Lebeg integralining 2-xossasiga ko'ra, u(t) funksiya Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiya.

x(t) funksiya $I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida absolyut uzluksiz, deyiladi, agar deyarli barcha $t \in I$ lar uchun hosilasi $\dot{x}(t)$ mavjud, Lebeg ma'nosida integrallanuvchi hamda barcha $t \in I$ lar uchun

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(t) dt$$

shartni bajarilsa. Ma'lum bo'lishicha, ixtiyoriy u(t) joiz boshqaruv hamda har qanday $x(t_0)$ boshlang'ich holat uchun (2) differensial tenglamaning x(t) yechimini topish mumkin ekan. Lekin bunday holatda x(t) funksiya uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lmasdan, balki, absolyut uzluksiz funksiya bo'ladi.

**Karateodori teoremasi.** Aytaylik, (2) tenglamadagi u(t) funksiya $I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lsin. U holda ixtiyoriy $x(t_0)$ boshlang'ich holatga nisbatan (2) tenglamaning x(t) absolyut uzluksiz yechimi mavjud va u yagona bo'ladi hamda ixtiyoriy $t \in I$ lar uchun (4) Koshi formulasi bilan beriladi. Ushbu formuladagi integral endi Lebeg ma'nosida tushuniladi.

**Isbot.** (4)-formula bilan berilgan x(t) funksiya (2) differensial tenglamaning yechimi bo'lishi bevosita tekshiriladi. Bu yerda x(t) yechimning yagonaligi isbotlanmaydi.

**Misol 1.** x(0)=(1,0) boshlang'ich shartli

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u_1(t), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u_2(t) \end{aligned} \qquad (5)$$

differensial tenglamaning yechimini topamiz, bu yerda $u_1(t)$, $u_2(t)$ funksiyalar bo'lakli-uzluksiz bo'lib, $[0,\pi]$ vaqt oralig'ida

$$u(t)=\left(u_1(t),\,u_2(t)\right)=\begin{cases}(0,1), & agar \quad 0\le t\le \dfrac{\pi}{2},\\[2mm] (-1,0), & agar\ \dfrac{\pi}{2}<t\le \pi,\end{cases}$$

shart orqali beriladi. (5) tenglamaga uchun $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ ga ega bo'lamiz. Bu matrisaning eksponensiali 1-misolda hisoblangan bo'lib, u

$$e^{at}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

ifodaga teng bo'ladi. Mazkur ifodani hamda $t_0=0$, $x(0)=(1,0)$ boshlang'ich shartlarni, u(t) funksiyani (4) Koshi formulasiga qo'yib, barcha $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ lar uchun

$$x(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}\cos(t-s) & \sin(t-s)\\ -\sin(t-s) & \cos(t-s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}\sin(t-s)\\ \cos(t-s)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ga ega bo'lamiz. Xuddi shunday, $t\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ lar uchun

$$x(t)=\begin{pmatrix}\cos\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right) & \sin\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\sin\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right) & \cos\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\int_{\frac{\pi}{2}}^t\begin{pmatrix}\cos(t-s) & \sin(t-s)\\ -\sin(t-s) & \cos(t-s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}\cos\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\sin\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}+$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^t\begin{pmatrix}\sin(t-s)\\ \cos(t-s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t\\ 1-\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin t+\cos t\\ 1+\cos t-\sin t\end{pmatrix}$$

munosabatni keltirib chiqaramiz. Va nihoyat, biz

$$x(t)=(1,0),\ agar\ 0\le t\le\frac{\pi}{2},\quad x(t)=(\sin t+\cos t,1+\cos t-\sin t),\ agar\ \ \frac{\pi}{2}\le t\le\pi,$$

yechimga ega bo'lamiz. Mazkur yechim mutlaq uzluksiz funksiya bo'lsada, uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lmaydi. Uning hosilasi $\dot{x}(t)$ $t=\dfrac{\pi}{2}$ da uzilishga ega bo'ladi.

## 22 §. Erishuvchanlik to'plami

Biz yana (1) tenglama bilan berilgan boshqaruv ob'yekti hamda $\left(|U(t)|\le k(t)\right)$, bu erda $k(t)$ $I=[t_0,t_1]$ kesmada Lebeg ma'nosida integrallanuvchi skalyar funksiya, ko'p qiymatli akslantirish ko'rinishida berilgan $U(t)$ joiz boshqaruvlar sinfini, $M_0 \in \Omega(E^n)$ boshlang'ich to'plamni ko'raylik. $\tau \in [t_0, t_1]$ bo'lsin. $\tau$ vaqtdagi $X(\tau; t_0, M_0)$ erishuvchanlik to'plami, deb $E^n$ fazali fazoning barcha nuqtalar to'plamniga aytiladi; qaysiki, $[t_0, \tau]$ vaqt oralig'ida boshlang'ich $M_0$ to'plamdan (2) tenglamaning x(t) yechimi bo'yicha har qanday u(t) joiz boshqaruv yordamida o'tish mumkin bo'lgan to'plamni tushunamiz. Shunday qilib, $X(\tau; t_0, M_0)$ erishuvchanlik to'plami $x(\tau)$ ko'rinishdagi nuqtalardan tashkil topgan, bu yerda $x(\tau)$ $x(t_0) \in M_0$ boshlang'ich shartli hamda u(t) joiz boshqaruvli (2) tenglamaning yechimi. Erishuvchanlik to'plamining ayrim xossalalarini ko'rib o'taylik.

**1-xossa.** $X(\tau; t_0, M_0)$ erishuvchanlik to'plami

$$X(\tau; t_0, M_0) = e^{(\tau - t_0)A} M_0 + \int_{t_0}^{\tau} e^{(\tau - s)A} U(s) ds \qquad (6)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Bu yerda $e^{(\tau - t_0)A} M_0$ $M_0$ to'plamning $e^{(\tau - t_0)A}$ chiziqli almashtirishdagi obrazini anglatadi, integral ostida esa barcha $s \in [t_0, \tau]$ lar uchun U(s) to'plamning $e^{(\tau - s)A}$ chiziqli almashtirishdan hosil qilingan ko'p qiymatli akslantirish turadi.

1-xossaning isboti (4) Koshi formulasidan, erishuvchanlik to'plami, chiziqli almashtirish oldida turgan to'plam obrazi, to'plamlarning algebraik yig'indisi, ko'p qiymatli akslantirishdan olingan Lebeg integralining ta'riflaridan bevosita kelib chiqadi.

**2-xossa.** Erishuvchanlik to'plami $E^n$ fazali fazoning bo'sh bo'lmagan kompakt qism to'plamidan iborat bo'ladi, ya'ni $X(\tau; t_0, M_0) \in \Omega(E^n)$.

Ushbu xossaning isboti bevosita (6) formuladan hamda ko'p qiymatli akslantirishdan olingan integralning bo'sh bo'lmaslik hamda kompaktlik to'g'risidagi 1-teoremadan kelib chiqadi.

**3-xossa.** Agar $M_0$ boshlang'ich to'plam qavariq bo'lsa, u holda $X(\tau; t_0, M_0)$ erishuvchanlik to'plami ham qavariq bo'ladi.

Bu xossaning isboti (6) formuladan hamda ko'p qiymatli akslantirishdan olingan integralning qavariqligi to'g'risidagi 1-teoremadan kelib chiqadi.

**4-xossa.** Erishuvchanlik to'plamining tayanch funksiyasi

$$C(X(\tau, t_0, M_0), \psi) = C(M_0, e^{(\tau - t_0)A^*}\psi) + \int_{t_0}^{\tau} C(U(s), e^{(\tau - t_0)A^*}\psi) ds \qquad (7)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Mazkur xossaning isboti bevosita (6) formuladan, tayanch
funksiyalarning 3,4-xossalardan, 2-teoremadan hamda $(e^{\alpha A})^* = e^{\alpha A^*}$ munosabatdan kelib chiqadi.

**5-xossa.** $X(\tau; t_0, M_0)$ erishuvchanlik to'plami $\tau$ argumentga uzluksiz bog'liq bo'ladi, ya'ni $X(\tau; t_0, M_0) \in \Omega(E^n)$ ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz.

**Isbot.** (6) formulaga ko'ra erishuvchanlik to'plamini

$$X(\tau; t_0, M_0) = e^{A\tau} C(\tau) \tag{8}$$

ko'rinishda yozib olish mumkin, bu yerda

$$C(\tau) = e^{-t_0 A} M_0 + \int_{t_0}^{\tau} e^{-sA} U(s) ds$$

ko'p qiymatli akslantirish 3-teoremaga ko'ra, uzluksiz bo'ladi. $e^{A\tau}$ matrisa $\tau$ argumentga uzluksiz bog'liq bo'lgani uchun, (8) formuladan erishuvchanlik to'plamining uzluksizligi kelib chiqadi.

**Masala.** $\tau = U(s) = S_1(0)$, $M_0 = S_1(0)$ va $[t_0, \tau] = [0,2]$ bo'lgan hol uchun

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1,$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + u_2$$

tenglama bilan berilgan boshqaruv obyektining erishuvchanlik to'plami topilsin.

## 23 §. Optimal boshqaruvning mavjudligi

Avvalgi paragraflarda biz optimal boshqaruv nazariyasining asosiy masalasi– boshqaruv masalasini o`rgandik. Agar boshqaruv masalasi ijobiy yechilsa, ya'ni hech bo'lmaganda bitta joiz boshqaruv mavjud bo'lib, ob'yektni boshlang'ich $M_0$ to`plamdan $M_1$ to`plamga o'tkazsa, u holda ikkinchi asosiy masala optimal boshqaruvning mavjudligi masalalasiga o`tsak ham bo`ladi.

Chiziqli tezkorlik masalasini esga olib o'tamiz. Obyektning quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$\dot{x} = Ax + u, \tag{1}$$

bu erda: $x$ - n o`lchovli obyektning fazaviy holati, $\mathcal{U}$ - n o`lchovli boshqaruv vektori, A – (n×n) o`lchovli kvadrat matritsa.

$\mathcal{U}(t)$ joiz boshqaruv deb, $|U(t)| \le k(t)$ baholashni qanoatlantiruvchi $U: E^1 \to \Omega(E^n)$ o`lchovli ko`p qiymatli akslantirishdan olingan ixtiyoriy o`lchovli bir qiymatli shohiga aytiladi, bu yerda k(t) – ixtiyoriy $I=[t_0,t_1]$ chekli vaqt oralig'ida Lebeg ma'nosida integrallanuvchi skalyar funksiya. Boshlang'ich $x_0$ holat mahkamlangan va boshlsng'ich hamda oxirgi $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$ $M_1$ holatlar berilgan.

Tezkorlik masalasining mohiyati obyektni $M_0$ to'plamdan $M_1$ to'plamga minimum vaqt oralig'ida o`tkazuvchi $\mathcal{U}(t)$ joiz boshqaruvni topishdan iboratdir.

**Optimal boshqaruvning mavjudlik teoremasi.** Faraz qilaylik, ob'yekt $[t_0,t_1]$ vaqt oralig`ida $M_0$ to`plamdan $M_1$ to`plamga boshqariluvchi bo`lsin. U holda shunday $\mathcal{U}^*(t)$, $t \in [t_0,t_1^*]$ optimal boshqaruv mavjudki $t_1^* - t_0$ minimal vaqt oralig'ida ob'yektni $M_0$ to`plamdan $M_1$ to`plamga olib o`tadi.

**Isbot:** Qandaydir $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida ob'yektni boshlang'ich $M_0$ to`plamdan tugallanuvchi $M_1$ to`plamga o'tkazuchi $\mathcal{U}(t)$ joiz boshqaruvlar $\{u(t)\}$ to`plamini qaraylik. Teoremaning shartiga ko`ra, bunday $\{u(t)\}$ boshqaruvlar to`plami bo`sh emas. $t_1^*$ - orqali $t_1$ x(t) fazaviy vektorni $\{u(t)\}$ to`plamdan olingan barcha bo'lishi mumkin bo'lgan $\mathcal{U}(t)$ boshqaruv orqali $M_1$ to`plamga tushish vaqt momentining quyi chegarasini belgilaymiz . Shunday qilib, x(t) fazaviy vektorni qandaydir joiz boshqaruv yordamida $M_0$ dan $M_1$ to`plamga $t_1^* - t_0$ vaqtdan qat'iy kichik vaqtda o`tishi mumkin emas. Biz endi $[t_0, t_1^*]$ vaqt oralig`ida ob'yektni $M_0$ to`plamdan $M_1$ to`plamga $t_1^* - t_0$ vaqt davomida o'tkazuvchi $\mathcal{U}^*(t)$ joiz boshqaruvning mavjudligini isbotlashimiz kerak, ya'ni $t_0$ maxkamlangan bo'lganligi sababli, $[t_0, t_1^*]$ vaqt oralig`ida.

$t_1^*$ vaqt obyektni $M_1$ to`plamga kelib tuishgandagi $t_1$ vaqtlarning quyi chegarasi bo'lsa, u holda $t_1^*$ ga yaqinlashuvchi $t_1^k$ momentlar ketma-ketligi mavjudki, yani $t_1^k \to t_1^*$, $t_1^k$ uchun quyidagi shart bajariladi

$$X(t_1^k;t_0,M_0)\cap M_1 \neq 0.$$

Barcha k lar uchun $x_k$ nuqta shu kesishmada yotadi, ya'ni,

$$x_k \in X(t_1^k;t_0,M_0)\cap M_1. \tag{2}$$

Chunki $x_k \in M_1$ hamda $M_1$ kompakt to`plam bo'lsa, u holda $\{x_k\}$ ketma-ketlikdan shunday

$$x^* \in M_1 \tag{3}$$

nuqtaga yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni ajratib olishimiz mumkin. Bu ketma-ketlikni yana $\{x_k\}$ bilan belgilaymiz. $\varepsilon > 0$ son berilgan bo'lsin. $\{x_k\}$ ketma-ketlik $x^*$ nuqtaga yaqinlashsa, u holda qandaydir $k_1$ nomerdan boshlab quyidagi $\| x^* - x_k \| \le \frac{\varepsilon}{2}$ shart bajariladi. Shunday qilib, (2) ga asosan, biz quyidagiga ega bo`lamiz

$$x^* = ( x^* - x_k) + x_k \in S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) + X(t_1^k;t_0,M_0) \tag{4}$$

Erushuvchanlik to'plami $X(t_1^k;t_0,M_0)$ $\tau$ argumentga uzluksiz bog'liq (erushuvchanlik to'plamining 5 xossasi). Shuning uchun qandaydir $k_2$ raqamdan boshlab quyidagi

$$X(t_1^k;t_0,M_0) \subset X(t_1^*;t_0,M_0) + S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$$

ifoda o`rinli bo`ladi. Bu erdan (4) munosabatga ko`ra, quyidagiga

$$x^* \in X(t_1^*;t_0,M_0) + S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$$

ega bo`lamiz. Chunki, $\varepsilon > 0$ ixtiyoriligidan, $X(t_1^*;t_0,M_0)$ to'plamni komakt ekanligidan (erushuvchanlik to'plamining 2-xossasi) quyidagiga ega bo'lamiz $x^* \in X(t_1^*;t_0,M_0)$, yoki (3) ifodani hisobga olib, quyidagi shartga

$$X(t_1^*;t_0,M_0)\cap M_1 \neq \emptyset$$

ega bo`lamiz. Bu erishuvchanlik to`plami tarifiga ko`ra, $[t_0, t^*]$ vaqt oralig`ida obyektni $M_0$ to`plamdan $M_1$ to`plamga olib o`tuvchi $\mathcal{U}^*(t)$ joiz boshqaruv mavjudligini bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

## 24 §. Pontryaginning maksimum prinsipi

Tezkorlikning chiziqli masalasida optimal boshqaruvning mavjudligini isbotladik. Endi, agar optimal boshqaruv mavjud bo'lsa, biz uni qanday topish kerakligini bilishimiz lozim. Buning uchun optimal boshqaruvning zaruriy shartidan foydalanish qulay. Shunday qilib, biz ixtiyoriy optimal boshqaruv qanoatlantiradigan shartni topishimiz kerak. Optimallikning Shunday zaruriy shartlardan biri Pontryaginning maksimum prinsipi hisoblanadi.

$I=[t_0 , t]$ vaqt oralig'ida shunday $\mathcal{U}^*(t)$ joiz boshqaruv berilgan bo'lsinki, unga mos kelgan (1) tenglamaning yechimi x(t) obyektni $I=[t_0 , t]$ vaqt oralig'ida $M_0$ to`plamdan $M_1$ to`plamga olib o`tsin, ya'ni $x(t_0)\in M_0$, $x(t_1)\in M_1$ chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin. $I=[t_0,t]$ vaqt oralig`ida $(\mathcal{U}(t), x(t))$ juftlik Pontryaginning maksimum prinsipini qanoatlantiradi, agar

$$\dot{\psi} = -A^*\psi \qquad (5)$$

yordamchi qo'shma differensial tenglamalar tizimning $\psi(t_0)\in S$ boshlang'ich shartda yechimi mavjud bo'lib, quyidagi uchta shart bajarilsa

1. Maksimumlik sharti

$$(u(t),\psi(t)) = c(u(t),\psi(t)) \qquad (6)$$

deyarli barcha $t\in I$ larda bajariladi.

2. $M_0$ to`plamda transversallik sharti

$$\big(x(t_0),\psi(t_0)\big) = c(M_0 ,\psi(t_0)). \qquad (7)$$

3. $M_1$ to`plamda transversiallik sharti

$$\big(x(t_0) - \psi(t_1)\big) = c(M_0 - \psi(t_1)). \qquad (8)$$

Karatedori teoremasiga ko`ra, $S$ birlik sferada berilgan ixtiyoriy $\psi(t_0)$ boshlang`ich qiymati uchun $I=[t_0,t]$ vaqt oralig`ida (5) qo'shma tenglamalar tizimning $\psi(t)$ yechimi mavjud va yagonadiyr. Aytaylik, $\psi(t)$ yechim berilgan bo`lsin. (6)-(8) shartlarning geometrik ma'nosi qanday ekanligini ko'rib chiqamiz. (6) shart $[t_0, t_1]$ kesmaning deyarli barcha $t$ vaqt momentlarida $\psi(t)$ vektorni $U(t)$ to'plamga $u(t)$ nuqtaga tayanch vector bo'lishligini anglatadi, $u(t)$ vector $U(t)$ to'plamdan shunday tanlanishi kerakki, natijada $(u(t),\psi(t))$ skalyar ko`paytma maksimal bo`lisin. Xuddi shuningdek, $M_0$ to`plamda transversallik (7) sharti, $\psi(t_0)$ vektorni $M_0$ to'plamga $x(t_0)$ nuqtaga tayanch vector bo'lishligini anglatadi, $M_1$ to`plamda transversallik (8) sharti, $-\psi(t)$ vektorni $M_1$ to'plamga $x(t_1)$ nuqtaga tayanch vector bo'lishligini anglatadi (6-rasm).

## 25 §. Optimallikning zaruriy sharti

Pontryaginning maksimum prinsipi optimallikning zaruriy sharti bo`lishini ko`rib chiqamiz.

**Optimallikning zaruriy sharti haqidagi teorema.** Tezkorlik masalasida $M_0$ va $M_1$ to`plam qavariq bo`lsin. So'ngra, $u(t)$ - *ob'yektni* $I=[t_0\ ,\ t]$ *vaqt* oralig`ida $M_0$ to`plamdan $M_1$ to`plamga olib o`tuvchi optimal boshqaruv va x(t) (1) tenglamaning unga mos kelgan yechimi bo`lsin. U holda, $(U(t), x(t))$ juftlik $I=[t_0\ ,\ t]$ *vaqt oralig`ida Pontryaginning maksimum prinsipini qanoatlantiradi.*

**Isbot.** Biz shunday $\psi(t_0)\in S$ boshlang`ich qiymatning mavjudligini isbotlashimiz kerakki, (5) *qo`shma tizimning unga mos kelgan* $\psi(t)$ *yechimi* uchun (6) – (8) shartlar bajariladi.

$x(t)$ yechim $x(t_0)\in M_0$ , $x(t_1)\in M_1$ chegaraviy shartlarni *qanoatlantiradi,* $u(t)$ *joiz boshqaruv, ya'ni o`lchovli* $u(t)\in U(t)$ *ni* qanoatlantiradi. erishuvchanlik to`plamning ta'rifiga ko`ra, $x(t_1)\in X(t_1;t_0;M_0)$ tegishlilik sharti bajariladi.

Shunday qilib,

$$X(t_1,t_0,M_0)\cap M_1\neq 0. \tag{9}$$

Teoremaning shartiga muvofiq, $M_0$ , $M_1$ to`plamlar qavariq va erishuvchanlik to`plamining 3 xossasiga ko`ra, $X(t_1;t_0;M_0)$ to`plami qavariq bo`ladi. Bu holda (9) shart ixtiyoriy $\psi\in E^n$ vector uchun (tayanch funksiyaning *11 xossasining* natijasiga qarang) quyidagi munosabatga ekvivalent

$$C(X(t_1,t_0,M_0),\psi)+C(M_1,-\psi)\geq 0. \tag{10}$$

Quyidagi funksiyani

$$p(t,\psi)=c(X(t_1;t_0,M_0),\psi)+c(M_1-\psi) \tag{11}$$

(10) shartga ko`ra, ixtiyoriy $\psi\in S$ vektor uchun quyidagi $\rho(t_1,\psi)\geq 0$ ga ega

bo`lamiz. Endi, $\bar{\psi}\in S$ vektor mavjud va natijada $\rho(t_1,\dot{\psi})=0$ ligini ko`rsatamiz.

Teskarisidan faraz *qilamiz. Barcha* $\psi\in S$ lar uchun $\rho(t_1,\psi)>0$ bo`lsin. $p(t_1,\psi)$ funksiya ikki tayanch funksiyaning yig`indisi sifatida (1 lemmaning natijasiga qarang) $\psi$ bo`yicha uzluksiz. Bundan tashqari, $X(t_1,\ t_0,\ M_0)$ *erishuvchanlik to`plami uzluksizligi* $t_1$ *ga* bog'liq bo'lgani uchun, $\rho(t_1,\psi)$ funksiya $t_1$ bo`yicha uzluksiz va 4- lemmaga ko`ra, $c(X(t_1;\ t_0,\ M_0),\ \psi)$ tayanch funksiya $t_1$ bo`yicha uzluksiz bo`ladi. Shuningdek, $p(t_1,\psi)$ $t_1$ va $\psi$ bo`yicha uzluksiz bo'lgani **hamda** $\psi \in S$ uchun $p(t_1, \psi)>0$ qat'iy tengsizlik bajariladi va S birlik sferada **kompakt** to`plam **bo'ladi**. Shunday $\alpha > 0$ son mavjudki, barcha $\psi \in S$ lar **uchun** quyidagi munosabat o`rinli $p(t_1, \psi) \geq \alpha$, ya'ni $q(\tau) = \min p(\tau, \psi) \geq \alpha > 0$ va $q(t_1)$ funksiya uzluksiz bo'ladi. Bundan shunday $\tau < t_1$ topiladiki, $q(\tau) = \min p(\tau, \psi) \geq 0$ tengsizlik hanuzgacha bajariladi. Bu barcha $\psi \in S$ lar uchun $p(\tau, \psi) \geq 0$ ekanligini anglatadi. $p(\tau, \psi)$ funksiyaning aniqlanishiga ko`ra, bu tengsizlik barcha $\psi \in S$ lar uchun quyidagi tengsizlikka ekvivalent

$$c(X(\tau; t_0, M_0), \psi) + c(M_1 - \psi) \geq 0$$

bo'ladi va o'z navbatida tayanh funksiyalarning 2-xossasiga ko`ra, $X(\tau; t_0, M_0) \cap M_0 \neq \emptyset$ shartga ekvivalentdir. Shunday qilib, $[t_0, \tau]$ vaqt oralig'ida $\tau < t_1$ ni tuzulishiga ko`ra, ob'yektni $M_0$ to`plamdan $M_1$ to`plamga olib o`tuvchi joiz boshqaruv mavjud. Bu $u(t)$ optimal boshqaruv ekanligiga zid.

Shunday qilib, $\bar{\psi} \in S$ vektor mavjudki, $\rho(t_1, \bar{\psi}) = 0$, ya'ni ((11) ga qarang)

$$c(X(t_1; t_0, M_0), \bar{\psi}) + c(M_1 - \bar{\psi}) = 0 \tag{12}$$

o`rinli. Modomiki, $x(t_1)$ nuqta ikkala $X(t_1; t_0, M_0)$ va $M_1$ larga tegishli ekan, u holda ikkita tengsizlikka ega bo`lamiz:

$$(x(t_1), \bar{\psi}) \leq c(X(t_1; t_0, M_0), \bar{\psi}),$$
$$(x(t_1), \bar{\psi}) \leq c(M_1 - \bar{\psi})$$

(tayanch funksiyaning 9- xossasiga qarang). Haqiqatdan ham, bu tengsizliklarda tenglik bajariladi, hech bo`lmaganda ularning birida qat'iy tengsizlik bo'lsa, u holda ularni qo`shib quyidagini hosil qilamiz

$$0 < C(X(t_1, t_0, M_0), \bar{\psi}) + C(M_1, -\bar{\psi}),$$

**va** bu (12) **shartga zid. Shunday** qilib, biz quyidagiga ega bo'lamiz

$$(x(t_1), \bar{\psi}) = c(X(t_1; t_0, M_0), \bar{\psi}), \tag{13}$$
$$(x(t_1), \bar{\psi}) = c(M_1 - \bar{\psi}). \tag{14}$$

**(13) munosabat** bilan shug'ullanamiz. Koshi formulasiga ko'**ra, quyidagiga** ega **bo'lamiz:**

$$x(t_1) = e^{(t_1 - t_0)A} x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1 - s)A} u(s) ds.$$

**Erishuvchanlik** to`plamining tayanch funksiyasi bizga ma'**lum. U quyidagi ko'rinishga ega**

$$c(X(t_1;t_0,M_0),\psi) = c\left(M_0, e^{(t_1-t_0)A'}\psi\right) + \int_{t_0}^{t_c} c\left(U(s), e^{(t_1-s)A'}\psi\right)ds.$$

Bularni (13) munosabatga qo`yib, quyidagiga ega bo`lamiz:

$$(e^{(t_1-s)A}x(t_0),\bar{\psi}) + \left(\int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A}u(s)ds,\bar{\psi}\right) =$$

$$= c\left(M_0, e^{(t_1-t_0)A}\bar{\psi}\right) + \int_{t_0}^{t_c} c\left(U(s), e^{(t_1-s)A'}\bar{\psi}\right)ds$$

Sodda **almashtirish** bajarib, bu munosabatni ikki qo'shiluvchi **shaklida yozib** olamiz

$$\left[c\left(M_0, e^{(t_1-t_0)A'}\bar{\psi}\right) - \left(x(t_0), e^{(t_1-t_0)A'}\bar{\psi}\right)\right] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_c}\left[c\left(U(s), e^{(t_1-s)A'}\bar{\psi}\right) - \left(u(s), e^{(t_1-t_0)A'}\bar{\psi}\right)\right]ds = 0 \qquad (15)$$

Barcha $t\in[t_0,t_1]$ lar uchun $x(t_0)\in M_0$ va $u(t)\in U(t)$ bo'lar ekan, u holda tayanch funksiyaning (9) xossasiga ko`ra, (15) munosabatdagi birinchi qo`shiluvchi va integral ostidagi funksiya barcha $t\in[t_0,t_1]$ larda manfiy bo'lmaydi. Bundan kelib chiqadiki,

$$c\left(M_0, e^{(t_1-t_0)A'}\bar{\psi}\right) - \left(x(t_0), e^{(t_1-t_0)A'}\bar{\psi}\right) = 0, \qquad (16)$$

$$\int_{t_0}^{t_c}\left[c\left(U(s), e^{(t_1-s)A'}\bar{\psi}\right) - \left(u(s), e^{(t_1-t_0)A'}\bar{\psi}\right)\right]ds = 0$$

Oxirgi munosabatdan Lebeg integralining 7-xossasiga ko`ra, deyarli barcha $t\in[t_0,t_1]$ lar uchun quyidagi tenglik bajariladi

$$c\left(U(t), e^{(t_1-s)A'}\bar{\psi}\right) - \left(u(s), e^{(t_1-t_0)A'}\bar{\psi}\right) = 0 \qquad (17)$$

Teorema isbotini yakunlashimiz uchun maksimum prinsipiga ko`ra (6)-(8) da (17), (16), (14) munosabatlarni almashtirish kerak. Buning uchun quyidagi funksiyani ko`rib chiqmiz

$$\psi(t) = \frac{1}{\beta}e^{(t_1-t)A'}\bar{\psi} \qquad (18)$$

bu erda $\beta = \left\|e^{(t_1-t_0)A'}\bar{\psi}\right\|$ $\quad\bar{\psi}\neq 0$, ligidan va $e^{(t_1-t_0)A'}$ matritsa xosmasligidan $\beta\neq 0$ bo`ladi. $\psi(t)$ funksiya (5) qovushma tizimning $\psi(t_0)\in S$ boshlang'ich shart ostidagi yechimi. Haqiqatdan ham, biz quyidagiga ega bo`lamiz

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1}{\beta}(-A')e^{(t_1-t)A'}\bar{\psi} = -A'\psi(t).$$

$$\|\psi(t_0)\| = \left\|e^{(t_1-t_0)A^*}\ \bar{\psi}\right\| = 1.$$

(18) munosabatdan $\bar{\psi} = \beta\, e^{(t-t_1)A^*}\ \psi(t)$ ayniyatga ega bo`lamiz. Bu munosabatni deyarli barcha $t\in[t_0, t_1]$ larda $\bar{\psi}$ uchun (17) munosabatga olib borib qo'ysak va $t=t_0, t=t_1$ da (16) hamda (14) munosabatlarga qo`yib quyidagi shartlarni hosil qilamiz:

$$c\big(U(t),\beta\psi(t)\big) - \big(u(t),\beta\psi(t)\big) = 0\ ,\ t\in[t_0, t_1]$$

$$c(M_0,\psi(t_0)) - \big(x(t_0),\beta\psi(t_0)\big) = 0\ ,$$

$$(x(t_1) - \beta\psi(t_1)) = c(M_1\ ,-\beta\psi(t_1)).$$

$\beta > 0$ bo'lganligidan, tayanch funksiya (1-xossa) musbat bir jinsli, u holda olingan ifodalarni $\beta$ ga qisqartirib, (6) – (8) shartga ega bo`lamiz.

Shu tariqa optimallikning zaruriy sharti isbotlandi.

## 26 §. Optimallikning yetarlilik sharti

Endi, tezkorlik masalasining yetarlilik shartlari bilan shug`ullanamiz. Bu masala

$$\dot{x} = Ax + u \tag{1}$$

tenglama bilan harakatlanuvchi obyektni boshlang`ich $M_0$ to`plamdan oxirgi $M_1$ to`plamga eng qisqa vaqt ichida o`tkazuvchi $u(t)\in U(t)$ joiz boshqaruvni topishdan iboratdir.

Optimallikning yetarlilik shartlari ham Pontryaginning maksimum prinsipi shaklida beriladi. Ta'rifga ko`ra, $(u(t), x(t))$ juftlik $I=[t_0\ ,t_1]$ vaqt oralig`ida maximum prinsipini qanoatlantiriradi, deyiladi, agar

$$\dot{\psi} = A^*\psi \tag{2}$$

yordamchi qo`shma sistemaning $\psi(t_0)\in S$ boshlang`ich shart ostidagi yechimi mavjud bo'lib, quyidagi uchta shartlar bajarilsa:

I. Maksimum sharti

$$(u(t),\psi(t)) = c(u(t),\psi(t)) \tag{3}$$

deyarli barcha $t\in I$ larda bajariladi;

II. $M_0$ to`plamda transversiallik sharti

$$\big(x(t_0),\psi(t_0)\big) = c(M_0,\psi(t_0))\,. \tag{4}$$

III. $M_1$ to`plamda transversiallik sharti

$$\big(x(t_1),\psi(t_1)\big) = c(M_1, -\psi(t_1)). \tag{5}$$

$I=[t_0\ ,t_1]$ vaqt oralig`ida maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi $(u(t), x(t))$ juftlik optimal bo`lishligi uchun u yana bir qo`shimcha shartni qanoatlantirishi yetarlidir. Bu shart $M_1$ to`plamda kuchaytirilgan transversiallik sharti deyiladi.

Aytaylik, $x(t)$ - I=[$t_0$ ,$t_1$] vaqt oralig`idagi (1) tenglamaning biror bir yechimi $\psi(t)$ esa (2) qo`shma tizimning qandaydir yechimi bo'lsin.

I=[$t_0$ ,$t_1$] vaqt oralig`ida $x(t)$ $M_1$ to`plamda $\psi(t)$ funksiya bilan kuchaytirilgan transversiallik shartinini qanoatlantiriradi, deyiladi, agar barcha $t_0$<t<$t_1$ momentlar oralig'i uchun

$$\left(x(t_0),-\psi(t_0)\right) > c(M_1,-\psi(t)) \qquad (6)$$

qat`iy tengsizlik bajarilisa.

**Optimallikning yetarlilik sharti haqidagi teorema.** $u(t)$ biror joiz boshqaruv, $x(t)$ esa obyektni I=[$t_0$ ,$t_1$] vaqt oralig`ida $M_0$ to`plamdan $M_1$ to`plamga o`tkazuvchi yechim bo`lsin. Faraz qilaylik $(u(t),x(t))$ juftlik I=[$t_0$ ,$t_1$] vaqt oralig`ida maksimum prinsipini qanoatlantirsin va $\psi(t)$ esa unga mos qo`shma funksiya bo'lsin. So`ngra, faraz qilaylik I kesmada $x(t)$ yechim $\psi(t)$ funksiya bilan $M_1$ to`plamda kuchaytirilgan transversiallik shartini qanoatlantirsin. U holda $u(t)$ boshqaruv optimal bo`ladi.

**Isbot.** $\vartheta(t)$ - I=[$t_0$ ,$t_1$] oraliqdagi biror bir joiz boshqaruv, $y(t)$ esa $y(t_0)\in M_0$ boshlang'ich shartli (1) tenglamaning mos yechimi bo'lsin. Quyidagi funksiyani ko`raylik

$$\xi(t) = (y(t) - x(t), \psi(t)).$$

Deyarli barcha $t \in I$ larga nisbatan $\xi(t) \le 0$ tengsizlikning bajarilishini ko`rsatamiz. Haqiqatdan, $x(t)$, $y(t)$ funksiyalar (1) tenglamaning yechimi, $\psi(t)$ (2) tenglamaning yechimi bo`lgani uchun, deyarli barcha $t \in I$ larga nisbatan

$$\dot{\xi}(t) = (\dot{y}(t),\psi(t)) - \left(\dot{x}(t),\psi(t) + y(t),\dot{\psi}(t)\right) - \left(x(t),\dot{\psi}(t)\right) =$$

$$= \left(Ay(t),\psi(t)\right) + \left(v(t),\psi(t)\right) - \left(Ax(t),\psi(t)\right) - \left(\mathcal{U}(t),\psi(t)\right) +$$

$$+\left(y(t),-A^*\psi(t)\right) - \left(x(t),-A^*\psi(t)\right) = \left(v(t),\psi(t)\right) - \left(\mathcal{U}(t),\psi(t)\right).$$

ga ega bo`lamiz. $u(t)$ boshqaruv barcha $t \in I$ larda (3) maksimum shartini qanoatlantirar ekan, u holda biz

$$\dot{\xi}(t) = (u(t),\psi(t)) - c(u(t),\psi(t))$$

ga ega bo`lamiz. $u(t)$ boshqaruv joiz, yani $u(t) \in U(t)$ bo`lgani uchun tayanch funksiyalarning 9-xossasiga ko`ra, deyarli barcha $t \in I$ larda $\dot{\xi}(t) \le 0$ ga ega bo`lamiz.

Endi, bizga qandaydir $\tau < t_1$ vaqt momenti berilgan bo'lsin. U holda Lebeg integralining 6- xossasiga ko`ra,

$$\xi(\tau)=\xi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{\xi}(t)dt \le \xi(t_0)$$

munosabat bajariladi. Bundan,

$$(y(\tau),\psi(\tau))-(x(\tau),\psi(\tau))\le(y(t_0),\psi(t_0))-(x(t_0),\psi(t_0))$$

$y(t_0)\in M_0$ bo`lgani uchun, $M_0$ dagi (4) transversiallik shartiga ko`ra,

$$(y(\tau),\psi(\tau))-(x(\tau),\psi(\tau))\le(y(t_0),\psi(t_0))-c(M_0,\psi(\tau))\le 0$$

ga ega bo`lamiz. Bu yerdan, $M_1$ to'plamdagi (6) kuchaytirilgan transversiallik shartiga ko'ra,

$$\big(y(\tau),-\psi(\tau)\big)\ge\big(x(\tau),-\psi(\tau)\big)>c\big(M_1,-\psi(\tau)\big).$$

ga ega bo`lamiz. Bu esa tayanch funksiyalarning 9-xossasiga ko`ra, $y(\tau)\in M_1$ ekanligini bildiradi.

Shunday qilib, biz $t_1$ dan qat'iy kichik bo`lgan $\tau$ vaqt momentida (1) tenglamaning $y(t_0)\in M_0$ shartli hech bir traektoriyasi $M_1$ to`plamga erisha olmaydi. Bundan esa $u(t)$ boshqaruvning optimalligini isbotlaydi. Shuni payqash mumkinki, bu teoremada $M_0$ va $M_1$ to`plamlarning qavariq bo`lishi shart emas.

Tezkorlik masalasini yechishda optimallikning yetarli shartlaridan qanday qilib foydalanish mumkinligini ko`rsatamiz.

**Misol 1.**
$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=u_2,\quad |u_2|\le 1$$

tenglama ko`rinishida berilgan ob'yektning $M_0=\{x\colon x_1=-1,|x_2|\le 1\}$ to`plamdan $M_1=\{x\colon 1\le x_1\le 2, x_2=0\}$ to`plamga eng qisqa vaqt ichida o`tish masalasini ko`raylik. Oldingi paragraflarda biz shu masala uchun $M_0$ to`plamdan $M_1$ to`plamga $I=\left[0,2\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right]$ vaqt oralig'ida o'tishni amalga oshiruvchi $u(t)$ boshqaruv va $x(t)$ yechimlarni qurgan edik. Jumladan, $(u(t),x(t))$ juftlik shu oraliqda Pontryaginning maksimum prinsipini qanoatlantiradi. $x(t)$ yechim

$$0\le t\le 2\sqrt{\frac{5}{2}}-1 \text{ bo`lganda } x(t)=\left(\frac{1}{2}t^2+t-1,\,t+1\right),$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}}-1\le t\le 2\sqrt{\frac{5}{2}}-1 \text{ bo`lganda } x(t)=\left(-\frac{1}{2}t^2-\left(2\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)t+2\sqrt{\frac{5}{2}}-4\frac{1}{2},\,-t+2\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right.$$

ko`rinishga ega edi. Bunga mos qo`shma tizimning $\psi(t)$ yechimi $\psi(t)=(\psi_1(0),-\psi_1(0)+\psi_2(0))$, ko`rinishga ega edi, jumladan,

$(\psi_1(0), \psi_2(0)) \in S$ boshlang'ich qiymat $\psi_2(\tau)=0$ shartdan **topilgandi, bu yerda** $\tau = \sqrt{\frac{5}{2}} - 1$. Bu shartni qanoatlantiruvchi $\psi(t)$ funksiyani

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2} - 2\sqrt{\frac{5}{2}}}} \left(1, -t\sqrt{\frac{5}{2}} - 1\right)$$

ko`rinishga ega bo`lishini tekshirish qiyin emas.

Agar $x(t)$ yechim $\left[0,\ 2\sqrt{\frac{5}{2}} - 1\right]$ vaqt oralig'ida $\psi(t)$ funksiya bilan (6) kuchaytirilgan transversiallik shartini qanoatlantirishini ko`rsatsak, u holda optimallikning yetarlilik shartlari to`g`risidagi teoremaga ko`ra, yechim va $u(t)$ boshqaruv optimal bo`ladi. Suni ko`rsatamiz. Mazkur masaladagi $M_1$ to`plamning tayanch funksiyasi

$$c(M_2, \psi) = \frac{3}{2}\psi_2 + \frac{1}{2}|\psi_1|$$

shart bilan beriladi. Bu tayanch funksiyani, $x(t)$ yechimni va qo`shma funksiya $\psi(t)$ ni (6) tengsizlikka ketma – ket ravishda qo`yib, murakkab bo'lmagan hisoblashlardan so'ng, quyidagi ko'rinishga kelamiz:

$$0 \le t \le \sqrt{\tfrac{5}{2}} - 1 \quad \text{da} \qquad \frac{1}{2}t^2 + \left(1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)t + 3 > 0$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{2}} - 1 \le t \le 2\sqrt{\tfrac{5}{2}} - 1 \ \text{da esa} \qquad -\frac{1}{2}t^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - 1\right)t - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}} > 0$$

(1) tengsizlik barcha $0 \le t \le \sqrt{\frac{5}{2}} - 1$ larda, (2) tengsizlik esa barcha $\sqrt{\frac{5}{2}} - 1 \le t \le 2\sqrt{\frac{5}{2}} - 1$ larda bajarilishini tekshirish qiyin emas. Demak, $x(t)$ yechim $\left[0, 2\sqrt{\frac{5}{2}} - 1\right]$ vaqt oralig'ida $\psi(t)$ funksiya bilan $M_2$ to'plamda kuchaytirilgan transversiallik shartini qanoatlantiradi, shuning uchun ham optimal bo`ladi.

**Optimallikning yetarlilik sharti haqidagi teoremaning natijasi.** $u(t)$ - biron bir joiz boshqaruv, $x(t)$ - ob'yektni $I=[t_0, t_1]$ oraliqda $M_0$ to'plamdan $M_1=\{0\}$ to'plamga o`tkazuvchi (1) tenglamaning mos yechimi bo'lsin. Faraz qilaylik $(u(t), x(t))$ juftlik I oraliqda Pontryaginning maksimum prisipini qanoatlantirsin. So'ngra, faraz qilaylik (1) ob'yekt ixtiyoriy $[\tau, t_1]$, $\tau \ne t_1$ vaqt oralig'ida $x = 0$ nuqtada local boshqaruvchi bo'lsin. U holda $u(t)$ boshqaruv optimal bo`ladi.

**Isbot.** Kiritilgan farazlar asosida $x(t)$ yechim $\psi(t)$ funksiya bilan $M_1$ to`plamda (6) kuchaytirilgan transversiallik shartini qanoatlantirishini, unga mos kelgan $(u(t), x(t))$ maxsimum prinsipidagi juftlik ekanligini ko`rsatamiz. U holda, optimallikning yetarliligi to`g'risidagi teoremaga ko`ra, $u(t)$ boshqaruv optimal bo'ladi. (6) munosabat $M_1 = \{0\}$ to`plam uchun

$$(x(t), -\psi(t)) > 0 \tag{7}$$

ko`rinishida bo`ladi va barcha $t_0 \le t \le t_1$ larga nisbatan bajarilishi kerak, $t_0 \le t \le t_1$, tengsizlikni qanoatlantiruvchi $t = \tau$ vaqt momentni mahkamlaymiz. $u(t)$ joiz boshqaruvda (1) tenglamaning yechimini $[\tau, t_1]$ vaqt oralig`ida $x = 0$ koordinata boshiga o`tishi mumkin bo'lgan $E^n$ fazali fazoning $P$ nuqtalar to`plamni ko`zdan kechiraylik. Ixtiyoriy $y \in P$ nuqta uchun

$$(y - x(\tau), \psi(\tau)) \ge 0 \tag{8}$$

tengsizlikni bajarilishini ko`rsatamiz. Haqiqatdan, teskari $\left(y - x(\tau)\,,\ \psi(\tau)\right) < 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $y \in E^n$ nuqtani va $y(\tau) = y$ boshlang'ich shart ostidagi (1) tenglamaning $y(t)$ yechimini olamiz. U holda yetarlilik shartlari haqidagi teoremaning isbotidagi kabi,

$$\left(y(t_1) - x(t_1), \psi(t_1)\right) = \left(y(\tau) - x(\tau), \psi(\tau)\right) + \int_{\tau}^{t_1} \dot{\xi}(t)dt < 0.$$

ga ega bo`lamiz.

$x(t_1) = 0$ bo`lgani uchun, bu yerdan $\left(y(t_1), \psi(t_1)\right) < 0$, bundan $y(t_1) \ne 0$, ya'ni $y \notin P$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib (8) tengsizlik ixtiyoriy $y \in P$ nuqta uchun bajariladi. (8) tengsizlikka asosan

$$C(P, -\psi(\tau)) = \max_{y \in P}(y, -\psi(\tau)) \le (x(\tau), -\psi(\tau)) \tag{9}$$

ga ega bo`lamiz. So'ngra, $[\tau, t_1]$ oraliqda ob'yekt $x = 0$ nuqtada local boshqaruvchi, degan farazga ko`ra, $S_\varepsilon(0) \subset P$ tegishlilik bajariladigan $\varepsilon > 0$ mavjud bo`ladi. Tayanch funksiyalarning 8-xossasiga ko`ra, bu ixtiyoriy $\psi \in E^n$ uchun $\varepsilon\|\psi\| \le c(P, \psi)$ ekanligini anglatadi. Koshi formulasiga ko`ra, biz $\psi(\tau) = e^{-(\tau - t_0)A^*}\psi(t_0)$ ga ega bo`lamiz. $\|\psi(t_0)\| = 1$ , $e^{-(\tau - t_0)A^*}$ matrisa xosmas bo'lgani uchun, $\|\psi(\tau)\| \ne 0$ bo`ladi. Demak, $c\left(P, -\psi(\tau)\right) \ge \varepsilon\|-\psi(\tau)\| > 0$ bo`ladi. (9) shartga asosan

$$\left(x(\tau), -\psi(\tau)\right) \ge c\left(P, -\psi(\tau)\right) > 0$$

ga ega bo`lamiz. Shunday **qilib,** (7) munosabat **barcha** $t_0 \le t \le t_1$ larda bajariladi. Natija isbot bo'ldi.

**Misol 2.** $\ddot{x} + x = f,$

Tenglama orqali mayatnikning tinchlanish masalasini ko`raylik, bu yerda $x$- mayatnikning muvozanat holatdan chetlashish miqdori, $f -$ esa mayatnikka qo`yilgan kuch, bu kuch $\|f\| \le 1$ shartni qanoatlantirishi kerak. Mayatnikning boshlang'ich $x_0$ holati va boshlang'ich tezlik $\dot{x}_0$ berilgan. Mayatnikning qisqa vaqt ichida muvozanat

holatga, ya'ni $M_1=\{(0,0)\}$ to`plamga keltirish kerak. $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $u_1 = 0, u_2 = 1,$

almashtirishlar kiritib, biz masalani standart ko'rinishga keltirib olamiz. Harakat tenglamasi

$$\dot{x}_1 = x,$$

$$x_2 = -x + u_2, \quad |u_2| \le 1, \tag{10}$$

ko`rinishda yozib olamiz. (10) tenglama orqali ifodalanuvchi obyekt ixtiyoriy $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida $x = 0$ nuqtada lokal boshqaruvchi hisoblanadi. Haqiqatdan ham, local boshqaruvchanlik to`g'ri teoremani qo`llaymiz. $v = (0,1)$ deb olamiz. U holda $-v, v \in U$, $v$, $Av$ vektorlar chiziqli erkli, chunki $Av = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan natija va optimallikning zaruriy sharti haqidagi teoremaga ko`ra, $u(t)$ boshqaruv faqat va faqat shu holda optimal bo'ladiki, agar, u $x(t)$ yechim bilan birgalikda, Pontryaginning maksimum prinsipini qanoatlantirsa.

## JAVOBLAR VA KO'RSATMALAR

**1.** a) (0,0) nuqtada $f_{min}=0$. b) (0,0) nuqtada $f_{max}=1$; v) ekstremum yo'q. **2.** Ekstremum yo'q. **3.** $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ va $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ nuqtalarda $f_{min}=-8$; (0,0) nuqtada ekstremum yo'q. **4.** (0,0) nuqtada $f_{min}=0$; $x^2+y^2=1$ aylananing nuqtalarida noqat'iy maksimum o'rinli bo'ladi. **5.** (1, -1) nuqtada $f_{max}=\sqrt{3}$. **6.** $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ nuqtada $f_{min}=4$. **7.** (1,0) nuqtada $f_{min}=-1$. **8.** $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ nuqtada $f_{min}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$; $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ nuqtada $f_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **9.** $x_1=x_2=...=x_n=\frac{2}{n^2+n+2}$ da $f_{max}=\left(\frac{1}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$. **11.** Yo'q. **13.** $\alpha_k$ *va* $\beta_k$ sonlar f(x) funksiyaning Furye koeffitsiyentlari bo'lishi kerak. **14.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)va\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nuqtalarda $f_{min}=-\frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)va\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nuqtalarda $f_{max}=\frac{1}{2}$. **15.** $\left(\frac{18}{13},\frac{12}{13}\right)$ nuqtalarda $f_{min}=\frac{36}{13}$. **16.** (2, 2, 1), (1, 2, 2) va (2, 1, 2) nuqtalarda $f_{min}=4$. $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right),\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)va\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$ nuqtalarda $f_{max}=4\frac{4}{27}$. **17.** $f_{max}=e^{\frac{a^2}{4}}$. **18.** $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ nuqtada $f_{min}=1$; $\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$ nuqtada $f_{max}=11$. **19.** (-1, 2, -2) nuqtada $f_{min}=-9$; (1,- 2, 2) nuqtada $f_{max}=9$. **20.** $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ nuqtada $f_{max}=\frac{1}{8}$. **21.** Ko'rsatma. $z=\frac{1}{2}\left(x^n+y^n\right)$ funksiyaning minimumini x+y=S shart ostida izlang. **23.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **24.** $\frac{19\sqrt{2}}{8}$. **25.** Tomoni $a=R\sqrt{2}$ ga teng bo'lgan kvadrat. **26.** Silindr asosining radiusi $r=\frac{R}{2}\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}$, balandligi $h=R\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}$. **27.** Birinchisi. **28.** Ixtiyoriy tartibdagi yaqinlik. **29.** Ixtiyoriy tartibdagi yaqinlik. **30.** $p=e^{-1}$. **31.** p=1. **32.** p=e-1. **33.** $p_1$=e-1. **34.** $p_2=\frac{2\pi+3}{6}$. **35.** $p_{1001}=e$. **36.** Uzluksiz. **37.** Uzluksiz. **38.** Uzilishga ega ($y_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$ ketma-ketlik qaralsin). **39.** **a)** Uzilishga ega; **b)** uzluksiz. **40.** **a)** Uzilishga ega; **b)** uzluksiz. **41.** Uzluksiz. **45.** $\Delta I=\frac{1-e^2}{2}$.

| $\alpha$ | $\Delta J$ | $\delta I$ | $\Delta J = \alpha + \frac{\alpha^2}{5}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,2 | 1 | |
| −0,1 | −0,098 | −0,1 | $\delta J = \alpha$ |
| 0,01 | 0,01002 | 0,01 | |

**48.** (see table above)

**49.** $\Delta J = \frac{3(e^2-1)}{4}\alpha + 6(3-e)\alpha^2 + \frac{\alpha^3}{5}$; $\quad \delta J = \frac{3(e^2-1)}{4}\alpha$

| $\alpha$ | $\delta I$ | $\Delta J$ |
|---|---|---|
| 1 | 4,7919 | 6,6821 |
| 0,1 | 0,4792 | 0,4693 |
| 0,01 | 0,0479 | 0,0481 |

**50.** 1) Ha; 2) ha; **3) ha; 4) yo'q**. **51.** $\delta J^2[y] = 2J[y]\cdot\delta J[y]$. **53.** $\Delta J = 3k + \frac{e}{e-1}k^2$; $\delta J = 3k$

| $k$ | $\Delta J$ | $\delta J$ |
|---|---|---|
| 1 | 4,582 | 3 |
| 0,1 | 0,3158 | 0,3 |
| 0,01 | 0,03016 | 0,03 |

**54.** $\Delta J = \frac{5}{3}k + \frac{8}{7}k^2$; $\delta J = \frac{5}{3}k$

| $k$ | $\Delta J$ | $\delta J$ |
|---|---|---|
| 1 | 2,810 | 1,667 |
| 0,1 | 0,181 | 0,167 |
| 0,01 | 0,0168 | 0,0167 |

**55.** $\Delta J = \frac{4}{3}k^2$; $\delta J = 0$;

| $k$ | $\Delta J$ | $\delta J$ |
|---|---|---|
| −1 | 0 | 1,3333 |
| 0,3 | 0 | 0,1200 |
| 0,03 | 0 | 0,0012 |

**57.** $\delta J = \int_a^b \delta y\,dx$. **58.** $\delta J = 2\int_a^b (y\delta y - y'\delta y')dx$. **59.** $\delta J = 2y(0)\cdot\delta y(0) + \int_0^1 (x\delta y + 2y'\delta y')dx$.

**60.** $\delta J = \int_0^\pi (y'\cos y\,\delta y + \sin y\,\delta y')dx$. **61.** $\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y_1'}\delta y_1' + \frac{\partial f}{\partial y_2'}\delta y_2' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n'}\delta y_n'\right)dx$.

**62.** $\delta^2 J[y, y] = 2J[\delta y, \delta y]$. **63.** $\delta^2 e^{F(y)} = e^{F(y)}\left((\delta F)^2 + \delta^2 F\right)$.

65. $\delta^2 J = \int_a^b \sum_{k,l=0}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(k)} \partial y^{(l)}} \delta y^{(k)} \delta y^{(l)} dx$. 66. $\delta^2 J = \iint_G \left\{ F''_{z}(\delta z)^2 + F''_{zz_x} \delta z \delta z'_x + \ldots + F''_{z_y z_y} \left(\delta z'_y\right)^2 \right\} dxdy$.

67. $\delta^2 J = \int \left[ \sum_{i,k=1}^{n} F''_{y_i y_k} \delta y_i \delta y_k + \sum_{i,k=1}^{n} F''_{y_i y'_k} \delta y_i \delta y'_k + \sum_{i,k=1}^{n} F''_{y'_i y'_k} \delta y'_i \delta y'_k \right] dx$.

68. $J[\varphi + \alpha\eta] = \Phi(\alpha)$ funksionalni kiritib, variatsiyaning ikkinchi ta'rifidan foydalaning. $\delta J = 0$ shart $\int_a^b K(s,t)\varphi(s)ds + \varphi(t) - f(t) = 0$ integral tenglamaga olib keladi.

69. Oldingi misolda qilingan mulohazalardan foydalanib, birinchi variatsiyani nolga aylanishini ifodalovchi Eyler funksional tenglamasining $(p\varphi')' - \varphi(x+2) - \varphi(x-2) + \varphi(x) + f(x) = 0$ ko'rinishga ega bo'lishini ko'ramiz. Bu aralash differensial-ayirmali tenglama.

70. $-(p\varphi')' + q\varphi = f(x)$. 71. $y = -x^3$. 72. $y = \frac{sh(2-x)}{sh1}$. 73. Ikkita ekstremal $y = \frac{1 + \left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)(2x-1)^2}{4\left(\sqrt{2} \pm 1\right)}$. 74. Ikkita ekstremal $y = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ $y = \sqrt[3]{(3x-1)^2}$. 75. y=(C+x)sinx, bu yerda C-ixtiyoriy o'zgarmas son. 76. $y = \frac{1}{2}\left[e^{-x} + (1+e)xe^{-x} - 1\right]$.

77. $y = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}x^3$. 78. $y = \frac{13}{6}x - \frac{1}{6}x^3 + 2$. 79. y=lnx. 81. Integral integrallash yo'liga bog'liq emas; variatsion masala ma'noga ega emas. 82. Agar $\alpha = 0$ bo'lganda, y=0; $\alpha \neq 0$ da silliq ekstremal mavjud emas. 83. y=cosx. 84. y=cosx+Csinx, bu yerda C-ixtiyoriy o'zgarmas. 85. y=x+1. 86. $y = \frac{shx}{sh1}$. 87. $y = e^{2(1-x)}$. 88. Ekstremallar mavjud emas; Eyler tenglamasi yechimga ega emas. 89. $y = C_1 + C_2 x - \frac{x^2}{4}$. 90. Ekstremallar yo'q. 93. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$. 94. y=chx. 96. $y = \frac{y_1 \sin x}{\sin x_1}$. 97. $y = 2x$. 98. $\frac{1}{r} = K$ munosabatni qanoatlantiruvchi aylana. 99. y=(1-x)shx. 100. $y = \frac{x^3}{6}\left(x^3 + 6x + 1\right)$. 101. Ekstremum yo'q. 102. Integral belgisi ostida to'la differensial qatnashganligi sababli variatsion masala ma'noga ega emas. 103. y(x)=shx.

104. $y = \frac{1}{2}x^2$. 105. $\begin{cases} y(x) = \sin 2x \\ z(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{32+\pi}{8\pi}x \end{cases}$. 106. $\begin{cases} y(x) = -\frac{1}{6}\left(x^3 + 5x - 6\right) \\ z(x) = x \end{cases}$. 107. $\begin{cases} y(x) = \sin x \\ z(x) = \sin x \end{cases}$

108. $\begin{cases} y(x) = \frac{x^2}{2} + 1, \\ z(x) = 1. \end{cases}$ 110. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y)$. 111. $\Delta\Delta z = 0$.

112. $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_j(x_1,...,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)+c(x_1,...,x_n)z=f(x_1,...,x_n)$ **113.** Yechish. Masala quyidagicha qo'yiladi. xOy tekislikning D sohasida joylashgan hamda o'zining proyeksiyasi bilan D soha bilan chegaraviy Γ egri chiziqni tashkil etuvchi berk fazoviy egri chiziqdan o'tadigan z=f(x,y) sirtlar ichida

$$S=\iint_D\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}\,dxdy$$

yuzasi minimal bo'lganini toping (Plato masalasi). Bu masalaga nisbatan Eyler tenglamasi

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_x}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_y}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}=0$$

ko'rinishda, yoki yoyilgan ko'rinishi $\varphi_{xx}\left(1+\varphi_y^2\right)-2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y+\varphi_{yy}\left(1+\varphi_x^2\right)=0$ kabi bo'ladi. Bu izlanayotgan minimal sirtlarning differensial tenglamasini ifodalaydi. **114.** z(x,y)=y. chegaraviy shartlar butun chegarada berilmagan bo'lsada, masala yagona yechimga ega. **115.** $r\cos\varphi+C_2=C_1\ln\left|r\sin\varphi+\sqrt{r^2\sin^2\varphi-C_1^2}\right|$. **117.** $x^2\cos C_2-y^2\cos C_2-2xy\sin C_2=C_1$.

**118.** Markaziy maydon. **119. a)** Xos maydon; **b)** Xos maydon; **c)** maydon tashkil etmaydi. **120.** Xos maydon. **121.** a) Markaziy maydon; **b)** maydon tashlik etmaydi; **c)** xos maydon. **122. a)** Markaziy maydon; **b)** Xos maydon; **c)** maydon tashkil etmaydi. **123.** Maydon tashkil etmaydi, chunki bu egri chiziqlar oilasi butun D sohani qoplamaydi. **124.** $y=C_1chx$ ekstremallarning xos maydonini tashkil etadi; $y=C_2shx$ ekstremallarning markaziy maydonini tashkil etadi. **126.** $y=\frac{x}{6}\left(1-x^2\right)$ elstremal markazi O(0,0) da bo'lgan $y=Cx-\frac{x^3}{6}$ ekstremallarning markaziy maydoniga mansub. **127.** $y=e^x$ ekstremalni $y=e^x+C$ ekstremallarning xos maydoniga biriktirish mumkin. **128.** Agar $\alpha<\pi$ bo'lsa, u holda y=0 ekstremalni markazi O(0,0) da bo'lgan y=Csinx ekstremallarning markaziy maydoniga kiritish mumkin. $\alpha>\pi$ da y=Csinx egri chiziqlar oilasi maydon hosil qilmaydi. **129.** y=x+1 ekstremal y=x+C xos maydonga biriktiriladi. **130.** $y=-\frac{x^3}{4}$. **131.** $y\left(\frac{y}{4}-x\right)=0$. **132.** $y^2-1=0$. **133.** O*(1,0). **134.** Qovushma nuqta yo'q. **135.** Bajariladi. **136.** Ixtiyoriy $\alpha$ da bajariladi. **137.** Yakobi sharti bajarilgan. y=0 ekstremalni ham markaziy, ham xos maydonga kiritish mumkin. **138.** Yakobi sharti bajarilgan. **139.** Yakobi sharti bajarilmagan. **142.** Ha. **143.** Ha. **144.** Ha. **145.** Ha, lekin Lagranj sharti faqat $\frac{b}{a}<1$ dagina bajarilgan. **146.** $y=e^x$ funksiyada kuchli minimumga erishiladi. **147.** y=2ln(x+1) funksiyada kuchli minimumga erishiladi. **148.** $y=x^2$ funksiyada kuchsiz minimumga erishiladi. **149.** $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqda sust minimumga erishiladi.

**150.** $y=\frac{\ln(1+x)}{\ln 2}$ egri chiziqda kuchli minimumga erishiladi. **151.** y=cosx+sinx egri chiziqda kuchli maksimumga erishiladi. **152.** Uzluksiz egri chiziqlarda ekstremumga erishilmaydi. **153.** y=2x+1 to'g'ri chiziqda kuchsiz minimumga erishiladi. Kuchli ekstremum yo'q. **154.** y=2x-1 ekstremalda kuchli minimumga erishiladi. **155.** y=$x^2$ ekstremalda kuchli minimumga erishiladi. **156.** y=x-1 ekstremalda kuchsiz minimumga erishiladi. **157.** $|b|<\frac{a}{\sqrt{2}}$ da $y=\frac{b}{a}x$ ekstremal sust minimumga, $|b|>\frac{a}{\sqrt{2}}$ da- kuchsiz maksimumga erishiladi. $|b|=\frac{a}{\sqrt{2}}$ da ekstremumga erishilmaydi. **158.** $y=\sqrt[3]{\left[\left(q^{3/2}-p^{3/2}\right)x+p^{3/2}\right]^2}$ ekstremalda $p\neq q$ bo'lganda kuchsiz minimumga erishiladi; p=q da y=p to'g'ri chiziq ekstremal bo'lib, u kuchsiz minimumni beradi.

**159. a)** $\varepsilon>0$ da $y=\dfrac{sh\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}{sh\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}$ ekstremal funksionalni kuchli minimumga erishtiradi.

**b)** $\varepsilon<0, |\varepsilon|>\frac{1}{\pi^2}$ da $y=\dfrac{sh\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}{sh\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}$ ekstremal funksionalni kuchli maksimumga erishtiradi. **c)** $\varepsilon=0$ da ekstremal masalaning uzluksiz funksiyalar sinfidagi yechimi mavjud bo'ladi. Berilgan funksionalga nisbatan $\varepsilon y''-y=0$ Eyler tenglamasining yechimi hisoblangan $y_\varepsilon(x)=e^{\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}}$ $(\varepsilon>0)$ funksiyani ko'raylik. $y_\varepsilon(x)$ funksiya y(1)=1 chegaraviy shartni aniq qanoatlantiradi, lekin ikkinchi chegaraviy shart y(0)=0 ni u qanoatlantirmaydi. Lekin $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(x)=0$ shartni qanoatlantirmaydi. $\varepsilon\to 0$ da $y_\varepsilon(x)$ dan $y(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$ "chegaraviy" yechimga ega bo'lamiz. **160.** $y=-\frac{2\ln(1+x)}{\ln 2}$ ekstremal kuchli minimumni beradi. **161.** y(x)=1 ekstremalda kuchli minimumga ega bo'lamiz. **162.** $y(x)=\frac{b}{a}x$ ekstremalda $\frac{b}{a}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lganda kuchsiz minimumga, $\frac{b}{a}>\frac{\sqrt{3}}{2}$ kuchsiz maksimumga erishiladi, $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ da hattoki kuchsiz ekstremumga ham erishilmaydi. **163.** $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqda b<a bo'lganda kuchsiz minimumga erishiladi; b>a da kuchsiz maksimumga; $b\ge a\sqrt{3}$ da kuchli maksimumga erishiladi, $b<a\sqrt{3}$ da na kuchli minimum, na kuchli maksimum mavjud bo'ladi.

**164.** y=2x, z=4x ekstremalda kuchsiz minimumga erishiladi. **165.** $\left.\begin{array}{l} y=x, \\ z=x^2-x, \end{array}\right\}$ parabola ekstremal bo'lib, u markazi $(0,0,0)$ nuqtada bo'lgan

$$\left.\begin{array}{l} y=\alpha x, \\ z=x^2+\beta x, \end{array}\right\} \qquad (S)$$

markaziy ekstremallar maydoniga biriktiriladi. Lagranjning kuchaytirilgan shartlari so'zsiz bajariladi. $0 \le x \le 1$ kesmada x=0 nuqtaga qovushma x* nuqtaning mavjud emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun (S) oilaning ekstremallari berilgan ekstremal

bilan $x \in [0,1]$ da kesishmasligini ko'rsatish yetarlidir. Haqiqatdan ham, faraz qilaylik, $x^* \in [0,1]$ nuqtada (S) oilaning ikkita biron bir ekstremallari kesishsin. U holda

$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x^* = \alpha_2 x^* \\ x^{*2} + \beta_1 x^* = x^{*2} + \beta_2 x^* \end{array}\right\}$ bu yerdan $\alpha_1 = \alpha_2 \; va \; \beta_1 = \beta_2$ **ekanligidan** kelib chiqadi.

Demak, hech qanday ikkita o'zaro farqli kesisha olmaydi. Shunday qilib, Yakobining kuchaytirilgan sharti [0,1] kesmada va, umuman olganda, chekli uzunlikdagi ixtiyoriy kesmada bajariladi. **166.** $y(x) = C_1 ch\dfrac{x-C_2}{C_1} - \lambda$ ekstremallar oilasi. Ixtiyoriy $C_1$, $C_2$ o'zgarmaslar hamda $\lambda$ parametr $y_0 = C_1 ch\dfrac{x_0-C_2}{C_1} - \lambda$, $y_1 = C_1 ch\dfrac{x_1-C_2}{C_1} - \lambda$, $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx = C_1\left(sh\dfrac{x_1-C_2}{C_1} - sh\dfrac{x_0-C_2}{C_1}\right) = l$.

**167.** $y(x) = 3x^2+2x+1$. **168.** $y(x) = \pm 2\sin n\pi x$, bu yerda $n-$ butun son. **169.** $y(x) = \dfrac{1}{4}(2x-x^2)$. **170.** $\sqrt{6}$. **171.** $r=R, \; z = C_1 + C_2\varphi$. **172.** $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. **173.** $\sqrt{20}$. **174.** $2\sqrt{2}-1$. **175.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **178.** $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **179.** $\sqrt{17+4\sqrt{6}}\left(\dfrac{5}{2}-\sqrt{6}\right)$. **180.** 1. **181.** Agar $\cos x_1 \ne 0$ bo'lsa, u holda ekstremumga $\left.\begin{array}{l} y=0, \\ z=0, \end{array}\right\}$ to'g'ri chiziqda erishiladi, xolos. Va aksincha, agarda $\cos x_1 = 0$, ya'ni $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, bu yerda n-butun son bo'lsa, u holda $y = C_4 \sin x, \; z = -C_4 \sin x$ bo'ladi, bu yerda $C_4$ ixtiyoriy o'zgarmas son. **182.** J(A, B)=4cth. **183.** $J(A,B) = \dfrac{26}{5}$. **184.** $y = 2x^{\frac{2}{3}}$. **185.** y=x va y=1 to'g'ri chiziqlarning kesmasidan, yoki y=0, y=x-1 to'g'ri chiziqlarning kesmasidan tuzilgan siniq chiziqlar mutlaq minimumni beradi. $y = \dfrac{1}{2}x$ to'g'ri chiziq sust minimumni beradi. **186.** $0 \le x \le 1 \; da \; y = -x; \; 1 < x \le 4 \; da \; y = x-2$, $0 \le x \le 3 \; da \; y = x; \; 3 < x \le 4 \; da \; y = -x+6$. Har bir siniq chiziqda funksional mutlaq minimumga erishadi. **187.** Mavjud emas. **188.** $y = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$. **189.** Ekstremallar-to'g'ri chiziqlardir. Agar $\left|\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right| < 1$ bo'lsa, u holda koordinatali burchaklarning bissektrisalariga parallel bo'lgan ikkita uzilishga ega bo'lgan yechimi mavjud bo'ladi. **190.** Berilgan nuqtalarni tutashtiruvchi y=xtgx to'g'ri chiziq $0 < tg\varphi < \pi$ bo'lganda sust minimumni, $\pi < tg\varphi < 2\pi$ da sust maksimumni beradi va h.k. Egilish burchaklarining tangensi $\frac{4n-1}{2}\pi$ (n-butun son) ga eng to'g'ri chiziqlarning kesmalaridan tuzilgan siniq chiziq kuchli minimumni beradi.

**191.** $y(x) = \begin{cases} \pm\frac{3}{4}x, & 0 \le x \le \frac{16}{5} \\ \pm\sqrt{9-(x-5)^2} & \frac{16}{5} < x \le \frac{34}{5} \\ \mp\frac{3(x-10)}{4} & \frac{34}{5} < x \le 10. \end{cases}$

**192.** Markazi OX o'qida bo'lgan

$$\frac{(x_1 + C_1)^2}{C_2^4} + \frac{y^2}{C_2^2} = 1, \qquad (1)$$

Ekstremal-ellipslar. Joiz sohaning chegaralari $y = 0$ *va* $y^2 = \pm 2(x - C_3)$ tenglamalar bilan aniqlanadi (oxirgisi $1 - y^2y'^2 = 0$ tenglamaning yechimidir). $C_1$ va $C_2$ parametrlar (1)-ellips berilgan A va B nuqtalardan o'tadigan qilib tanlanadi. Ellipsning yoyida funksional maksimumga erishadi. Agar A nuqtadan B nuqtagacha bo'lgan yo'lni ikkita parabolalarning yoyi bo'yicha (balki, y=0 to'g'ri chiziqning kesmasi bo'yicha) tanlaydigan bo'lsak, u holda funksional minimumga erishadigan uzilishli yechimga ega bo'lamiz (minJ=0).

**193.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2}{4p^2}, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{x^2y}{2p}$. **194.** $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2xy}, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p^2}{4xy^2}$.

**195.** $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}}, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}}$.

**196.** $\frac{dy_1}{dx} = \frac{p_1}{2}, \quad \frac{dp_1}{dx} = 0, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{p_2}{2}, \quad \frac{dp_2}{dx} = 2y_2$.

**197.** $\frac{dy_1}{dx} = \frac{p_1}{2y_1}, \frac{dy_2}{dx} = \frac{p_2}{2y_2}, \frac{dp_1}{dx} = \frac{p_1^2}{4y_1^2}, \frac{dp_2}{dx} = \frac{p_2^2}{4y_2^2}$.

**198.**

$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{p_1}{2}, \quad \frac{dy_2}{dx} = -\sqrt{p_2}, \ \frac{dp_1}{dx} = 2x, \frac{dp_2}{dx} = 0; \frac{dy_1}{dx} = -\frac{p_1}{2}, \frac{dy_2}{dx} = \sqrt{p_2}, \frac{dp_1}{dx} = 2x, \quad \frac{dp_2}{dx} = 0.$

**199.** $y^3 = C_1x^3 + C_2$. **200.** $y^3 = \ln^2 x$. **201.** $x = C_1 \times \int \frac{dy}{\sqrt{G^2(y) - C_1^2}}$. **202.** $y = \frac{x^2 - x - 1}{2}$ ekstremalda kuchli minimumga erishiladi: $\min J = -\frac{5}{4}$. **203.** $p(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$.

Ekstremallar-markazi OX o'qida bo'lgan $y=\sqrt{C_1^2-(x-C_1)^2}$ yarim doiralar; $y=\sqrt{2C_1x-x^2}$ $O(0,0)$ nuqtadan o'tuvchi ekstremallar; maydon-yuqori yarim tekislik. **204.** Markazi $O(0,0)$ nuqtada bo'lgan aylananing $M_1(x_1, y_1)$ nuqtadan o'tuvchi yoyi kuchli minimumni beradi.

**205.** $xF\left(\frac{y}{x}\right)=C$. **206.** $3x^2-8xy+6y^2=C$ ellipslar. **207.** $x^3+2y^3-3xy^2-2x^2y=C$.

**208.** $f=\sqrt{1+y'^2}$. **209.** $f=xy\sqrt{y'}$. **210.** $f=xyy'^4$. **211.** $f=\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\left(x^2y'^2+y^2\right)}$.

**212.** $\lambda_n=1+n^2\pi^2, \quad y_n(x)=\pm\sqrt{2}\sin n\pi x \quad (n=1,2,\dots)$.

**213.** $\lambda_n=\frac{\ln^2 2+4n^2\pi^2}{4\ln^2 2}$, $y_n(x)=\pm\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\ln x\right)}{\sqrt{\ln\sqrt{2}}\sqrt{x}}$.

**214.** $\lambda_n=\frac{25+4n^2\pi^2}{4}, \quad y_n(x)=\pm\frac{\sqrt{2}\left(\sin n\pi\ln x\right)}{\sqrt{x}}$ $(n=1,2,\dots)$.

**215.** $\lambda_n=1-n^2$. $y_n(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \ (n=1,2,\dots)$.

**216.** $\lambda_n=-\frac{13\ln^2 2+4n^2\pi^2}{4\ln^2 2}$, $y_n=\pm\frac{\sin\left[\frac{n\pi\ln(1+x)}{\ln 2}\right]}{\sqrt{\ln\sqrt{2}}\sqrt{1+x}}$, $(n=1,2,\dots)$.

**217.** $y=1-x^2$ , deb olib, $\lambda_1\le\frac{35}{138}$ ga ega bo'lamiz. Aniq qiymat $\lambda_1=\frac{1}{4}$. **218.** $y=x(1-x)$ deb olib, $\lambda_1\le 10$ ga ega bo'lamiz. Aniq qiymat $\lambda_1=\pi^2$. **219.** $\lambda_1^2=10$; aniq qiymat $\lambda_1^2=\pi^2$. **220.** $\lambda_1=0{,}493.$ . **221.** $\lambda_1=6; \quad z_1(x,y)=\alpha\left(x^2+y^2-1\right)$.

## ADABIYOTLAR


1. Алексеев В.М. Галеев Э.М.,Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.
2. Ахиезер Н.И. Вариационое исчисление. Харьков: Изд-во Харьк.Ун-та, 1981.
3. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. М.: Наука, 1965.
4. Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950.
5. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
6. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд-во БГУ, 1981.
8. Гасс С. Линейное программирование. М.: Физматгиз, 1961.
9. Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. Т. 1 и 2. М.: ГИТТЛ, 1957.
10. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1968.
11. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976.
12. Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию. М.: Наука, 1969.
13. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
14. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975.
15. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. М.: Наука, 1973.
16. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
17. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
18. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
19. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
20. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
21. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.

# MUNDARIJA

## I BOB. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING EKSTREMUMI



## II BOB. FUNKSIONALLARNING EKSTREMUMLARI



## III BOB. OPTIMAL BOSHQARUV NAZARIYASI

**Mamadaliev Numanjon,**
**Tuxtasinov Muminjon**

# VARIATSION HISOB VA OPTIMAL BOSHQARUVNING ASOSIY MASALALARI

**(o'quv qo'llanma)**

**Bosishga ruhsat etildi 31.07.2012 Bichimi 60x84 1/16. Tezkor «rizograf» bosma usulida bosildi. Nashryot hisob tabog'i 14.0 Shartli bosma tabog'i 19.7 Bahosi shartnoma asosida. Adadi 100 nusxa. Buyurtma № 111.**

**«Universitet» nashryoti. Toshkent 100174, Talabalar shaharchasi, M.Ulug'bek nomidagi UzMU ning ma'muriy binosi. UzMU bosmaxonasida bosildi.**